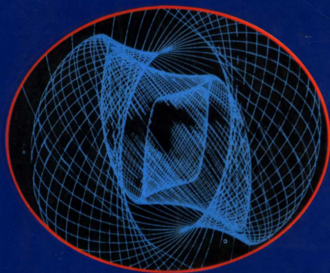
数学观与方法论

周春荔 编著

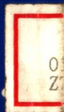


SHUXUEGUAN YU FANGFALUN

首都师范大学出版社

责任编辑／杨鸿霄

封面设计／孙宝旗





ISBN 7-81039-707-9/O · 12

定价：10.00 元

SHUXUEGUAN YU FANGFALUN

数学观与方法论

周春荔　编著

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学观与方法论/周春荔编著．—北京：首都师范大学出版社，1996.8

ISBN 7-81039-707-9

Ⅰ．数…　Ⅱ．周…　Ⅲ．数学-方法论　Ⅳ．01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 06891 号

首都师范大学出版社

(北京西三环北路 105 号　邮政编码 100037)

北京首师大印刷厂印刷　全国新华书店经销

1996 年 8 月第 1 版　2001 年 1 月第 2 次印刷

开本 850×1168　1/32　印张 8.5

字数 211 千　印数 2,001～5,000 册

定价 10.00 元

内容提要

数学观与方法论属于数学哲学的研究范畴。本书通过对数学的客观基础，数学的对象与方法，数学概念的联系，数学运算的相互转化，数学中的几对矛盾，数学的发现等专题的研究分析，普及而又具有理论性地介绍了数学观与方法论的基本知识。全书内容密切结合中学数学教育的实际. 对数学教育工作者学习唯物辩证法，落实素质教育目标，有积极的研究参考价值。

本书可供高等师范院校数学系学生作选修课教材，供数学教育硕士课程班做数学方法论课程教材，也可供广大数学教育工作者、中学数学教师教研时参考。

序 言

数学是一门基础学科。它的研究对象是现实世界的空间形式与数量关系。自从有人类生产实践活动以来，自从数学产生伊始，至今已有两千余年的文字记载历史。随着生产的发展，科学技术的进步，数学已经发展成为众多的分支和门类，而且日益抽象与形式化。数学的应用遍及自然界、社会、人类思维的各个领域，人们已经普遍认识到，一门科学只有当它达到了能够运用数学时，才算真正发展了的。总之，数学是以数与形这两个基本概念为两大柱石，以几何、代数和分析等学科构成数学的本体与核心，逐步演进发展起来的形式抽象、理论严谨、应用广泛的一门基础学科。面对这株根深叶茂生长迅速的“数学之树”，数学家与哲学家都在思考，数学是什么？数学的研究对象是什么？数学有什么特点？它的发展有什么规律？人们又是如何发现这些规律的？对上述这类问题的研究领域，我们统称之为数学观与方法论。它属于数学哲学范畴的基本问题。

数学观与方法论一直为古今中外的数学家、哲学家所关注。越是基础的问题越难回答。因此，数学观与方法论也是一个探索之中的正在形成发展的研究领域。

数学工作者的主要任务是研究数学。通过探索提出新概念、发现新问题，得出新结论，并且给予逻辑的证明。除此之外，他们还要总结数学的研究经验、思想方法、认识规律。比如数论的方法、集合论的方法、公理化的方法、极限的方法等等。对这种方法的研究相对于具体数学问题的研究而言或多或少地已经带有思辩的性质。进而还要回答自己对数学对象的看法，对数学发展规律、研究方法的认识，这些问题已是对于数学哲学范畴的思考，对

数学的上述思考成果与自然科学观方法论的成果相结合，经过概括与综合成为一般的科学方法论，再进一步升华概括为哲学认识论中的方法论。可见，数学观与方法论这一研究领域，属数学与哲学之间的交缘地域——数学哲学。它是联系数学与哲学的纽带。数学的新思想、新方法、新成果往往通过这一纽带为哲学提供养分，充实哲学的科学基础。哲学思想也经常通过这一纽带对数学的发展及研究工作产生一定的影响。

数学工作者在自己的研究领域里为什么要学习数学观与方法论呢？这种需要来源于数学与自然科学的研究实践。数学与自然科学的实践需要辩证思维而且可以萌发辩证思维。科学实践面向实际，经受实践的检验，倾听实践的呼声，这会潜移默化地影响研究人员逐步形成一种认真、严格、实事求是的习惯，这种习惯是唯物的。大量的科学经验告诉研究人员，孤立静止地看问题是不对的，联系发展地看问题是有益的。随着研究经验的积累，数学与自然科学工作者就会在工作实践中萌发辩证的思维。周恩来同志早在 1956 年就曾号召科学工作者应该通过自己的业务实践本身来学习辩证唯物主义。可见，数学观与方法论的学习与研究，正是数学工作者通过自身业务实践来学习唯物辩证法的一种好形式。

常有这样一种误解："过去的数学家、自然科学家不懂唯物辩证法，不也取得成就了吗?"对这个问题，日本科学家武谷三男在《关于自然的逻辑》（写于 1947 年 3 月 31 日）中给予了明确的回答，他指出："他们并不是不懂得自然辩证法，由于他们掌握以前的自然科学成果，而不自觉地掌握了自然辩证法，当他们碰到自己没有接触过的新局面时，首先用的方法是类比法，去寻求与以前结果的类似之处，这个方法有着相当的指导意义。其次是用尝试错误法作种种尝试。他们就是通过这种方法达到了连自己也不能理解的那种结果的。然而他们即便是天才，也不总是取得成功的，毋宁说失败的情况倒要多一些。并且，对于所不能理解的新

结果，也因为没有辩证法的修养而不能充分消化，所以往往阻碍了科学的发展，从方法论来说，阻碍科学发展的就是上面说过的非辩证法的机械论和神秘的唯心论。"我们引证的科学家这段切身体会告诉我们：数学与自然科学工作者通过研究本学科基础中的哲学问题，比如数学工作者通过研究数学观与方法论来自觉地掌握唯物辩证法，必将如虎添翼，对数学研究工作是非常有益的。

广大的数学教育工作者，中学现职数学教师以及高师数学系学生——未来的中学数学教师为什么要学习“数学观与方法论”呢？其根本原因是我国数学基础教育发展形势的需要。

我国中小学数学教育是基础教育，其中从小学到初中阶段是义务教育。所学的数学既是一种文化知识，又是打开科学大门的钥匙。面对21世纪信息社会的挑战，要求我们的受教育者应该是“会数学思维”的人。基础教育要从应试教育向素质教育转轨，为21世纪国际竞争的需要培养合格的人才。《数学教学大纲》（试用修订版）规定数学教学目的是：使学生学好当代社会中每一个公民适应日常生活、参加生产和进一步学习所必需的代数、几何的基础知识与基本技能。进一步培养运算能力，发展思维能力和空间观念，使他们能够运用所学知识解决简单的实际问题，并逐步形成数学创新意识。培养学生良好的个性品质和初步的辩证唯物主义的观点。大纲中明确将由数学概念、法则、性质、公式、公理、定理的内容所反映出来的数学思想和方法归属于基础知识之中。并界定初中数学中的辩证唯物主义教育因素主要是：数学来源于实践又反过来作用于实践的观点；数学内容中普遍存在的对立统一、运动变化、相互联系、相互转化等观点。初中数学中要培养的创新意识主要是指：对自然界和社会中的现象具有好奇心，不断追求新知、独立思考，会从数学的角度发现和提出问题，并用数学方法加以探索、研究和解决。为了适应基础教育发展的新形势，顺利完成中学数学教育中的上述教育因素规定的任务，作为中学数学教育工作者学习数学观与方法论的基本知识的必要性

就已经不言自明了。这也正是本书编写的直接动因。

本书的编写是以中学数学教育的基本要求为出发点，以史料、观点便于教学相结合的形式来进行叙述的，为使用本书的读者进一步的探索和研究留有充裕的空间，供研习以用武之地。

目 录

第一章

数学的客观基础

数学的“王国”是用各种抽象的符号以演绎的形式构筑起来的。数学在现实世界中的各个方面有着广泛的应用，以致在现代科学技术中，如果不借助数学，不与数学发生关系，就不可能达到应有的精确度与可靠性。为什么数学的“神机妙算”能有如此广阔的用场呢？这只有正确地认识数学的客观基础，才能对这个问题作出科学的回答。

第一节　数学与现实世界

数学与现实世界有没有关系？有怎样的关系？自古以来的数学家和哲学家有着各种不同的认识，一直进行着激烈的争论。对这个问题的种种看法可以归结为：纯数学产生于纯思维呢？还是纯数学是某种起源于经验、是来自外部世界然后又脱离外部世界的东西呢？

我们举两个认为纯数学产生于纯思维的例子。

例 1. 古代的柏拉图学派注意到了演绎推理所得的结论与观察的结果或归纳推理所得的结果非常符合。他们无法利用别的理由去说明这种符合，于是就认定数学乃是对于自然界和宇宙中内在的终极、永恒的实在的研究，认为对数学原理的认识，必定先于对于经验的确切解释。柏拉图曾描写苏格拉底和一个童仆的对话，这个童仆虽然从来没有学过数学，但通过启发，他能够解答数学难题。柏拉图说：为什么他能解答呢？就因为这种知识是他本来就有的，在经验以前已经先有的。

例 2. 康德（1724—1804 年）认为“严格的数学命题都永远是先天的判断，而非经验的判断。因为它们具有不能来自经验的必然性。如果有人对这还有异议，我愿意把我的论断限于纯数学，纯数学这个概念就暗示着它不包含有经验的知识，只包含纯先天的知识。”

以上二例都是把数学说成是与现实世界无关的、先于经验的。

辩证唯物主义如何看数学与现实世界的关系呢？

辩证唯物主义既反对把数学看成是先验的与现实世界无关的，也反对把数学看成只是经验的科学。而认为纯数学是某种起源于经验，是来自外部世界然后又脱离外部世界的东西。精确地说，纯数学的对象是现实世界的空间形式和量的关系，是非常现实的材料。这些材料以极度抽象的形式出现，它是对现实世界的能动的反映。前半句话与唯心主义观点划清了界限，后半句话与形而上学机械唯物论划清了界限。

一、数学内容的现实起源

我们从数与形概念的起源来分析。

数学发展至今已形成了日益庞杂的分支。数与形这两个基本概念始终是整个数学的两大柱石。然而数与形这两个概念的起源离不开现实世界为我们提示的经验与材料。何以证明呢？

从历史方面看，数学发展史为我们提供了丰富证据。

数的概念起源于“数”，要数就得有被计数的现实物体为对象。原始人采用“结绳记数”，就是把猎获物等现实物体集合与绳子结的集合进行比较，比较的结果只表明猎获物个数正如绳子的结数那样多。不少原始部落中尚残留有用手指脚趾记数的遗迹。

如一些原始部落用“我”、“月亮”表示 1，用“眼睛”、“耳朵”、“鸟的翅膀”表示 2，用“手”表示 5，用整个人表示 20，用 5 人表示 100 等。

如 Marelug 的人把 5 叫 nabiget，其中 get 是“手”的意思，这表明“ 5”代表“像手的指头那样多”。美洲印第安人，计数曾用手指和脚趾，“1”——一个指头，“2”——两个指头……“6”——用一只手一个指头。巴西有的印第安部落计数最多到“ 5”，比 5 大的数都叫“多”，这反映了这个部落对数的认识还处于初级阶段。

原始部落的考察再现了人类认识数的过程的缩影。正如恩格斯分析指出的，“人们曾用来学习计数，从而用来作第一次算术运算的十个指头，可以是任何别的东西，但是总不是悟性的自由创造物。为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性仅仅顾及到数目的能力，而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果”。

形的概念也是从现实中抽象得来的。物质世界的物体以各种“形状”客观地存在着。“大自然以数学的语言讲话——这个语言的字母是：三角形以及其他各种数学形体”（伽利略语），耸立的原始森林是直的，满月是圆的，水晶石是结晶体，蜂巢结构是极精巧规则的多面体，向日葵种子排列是按对数螺线排列的（$\rho=ae^{k\theta}$），有些植物绕竿攀援形成螺旋线（今有木长二丈，围之三尺，葛生其下，缠木七周，上与木齐，问葛长几何?）。现代仿生学发现许多植物的叶子是自然形成的特殊曲线，如：

三叶草叶子满足方程式 $\rho=4(1+\cos3\varphi+\sin^2 3\varphi)$

睡莲的叶子满足方程式

$$(x^2+y^2)^3-2ax^3(x^2+y^2)+(a^2-r^2)x^2=0$$

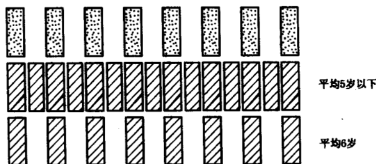
笛卡儿曾研究过一族曲线 $x^2+y^2=3axy$,它的形状与“茉莉花瓣”一样。正如恩格斯所指出的,“几何学的结果不外是各种线、面、体或它们组合的自然特性,这些组合大部分早在人类以前就已在自然界中出现了。(放射虫、昆虫、结晶体等等)”[1] 人类对形的认识,“必须先存在具有一定形状的物体,把这些形状加以比较,然后才能构成形的概念。”[2] 很有趣的是,角的概念很可能是从观察人的大小腿(股)或上下臂之间形成的角而产生的,因为大多数语言中,角的边常用股或臂的字来代表。例如英文中,直角三角形的两边叫两臂,汉语中直角三角形的一条直角边也叫股。

从个体方面看,心理学对儿童怎样形成数学概念的研究实验,也为辩证唯物主义观点提供了证据。

实验Ⅰ. 一对一配合实验法

取八个红木片,每个相间半寸排成一排,要参加实验的小孩从盒中取出和桌上木片一样多的蓝木片,实验结果是:

较小年龄(平均5岁以下)取出与红木片一样长的一列排得很密集,中间不留距离。他们意识中只要排列一样长,数目就一样多。较大儿童(平均6岁)会把蓝、红木片对应起来从而得到正确的数目,但他们未必就有了数的概念。平均7岁以上的儿童无论排的密与稀,他们会判定数目是否一样多。如图(1-1-1)。



图(1-1-1)

[1] 《马克思恩格斯全集》人民出版社,1963年版,第20卷,第664页。
[2] 恩格斯:《反杜林论》人民出版社,1970年版,第35页。

实验Ⅰ．研究儿童的自然几何学很有趣

几何学在历史上发展顺序，最早是欧氏几何，17 世纪产生了投影几何（透视问题），19 世纪产生了拓扑学（敞开结构与闭合结构的区别，内与外区别，接近与隔离之区别）。儿童几何学发展次序似乎是与几何学在历史上发现次序相反的。儿童 3 岁时能辨别敞开图形与闭合图形，此后他才开始发展他的欧几里得概念和投影几何概念。比如把一些木桩排成直线，年龄最小者一个接一个排，形成波形线（按拓扑方式进行）。4 岁以上儿童在有别的参照物的情形下（如按照桌边平行的方式）排成直线，7 岁时才会用眼来校正三点定一直线[1]。

以上实验说明数与形的概念不是先验的，从头脑中自生，先天就有的，而是从现实世界得来的，是起源于经验的。

那么更复杂一些的数学概念的来源如何呢？

在数与形的概念形成以后，随着数学的发展，数学问题的来源呈现了极为复杂的情况。

下面通过例子进行归纳分析

①整数运算法则，最初的几何问题（如二倍立方问题、化圆为方问题）都是由外部现象世界的经验得来，在人类文明的早期被发现而提出的。

②微积分的产生有着明显的实际背景，最初求导数的流数法，就是人们纯粹实验地发现的。由解决求变速运动物体的瞬时速度与不规则图形面积或不规则体体积而引起的。比如开普勒 1615 年发表的“新空间几何”就是由一个很平常的问题——求一个酒桶的最佳比例所引起的。

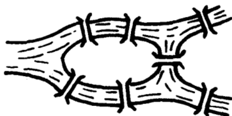
③概率论。对有关概率问题兴趣的逐渐出现，最初是由于保险业的发展，但是鼓舞伟大数学家思索的专门问题却来自以骰子和纸牌赌博的贵族们的要求。一个骑士德·梅雷向帕斯卡提出关

---

〔1〕 瑞士皮亚杰（J. Piaget）《儿童是怎样形成数学概念的》。

于“点的问题”，帕斯卡就这个问题（1654 年）与费尔马通信，建立了概率论的基础。惠更斯到巴黎时，听说了他二人的通信，并试图自己寻找答案，1657 年发表了“论机会游戏的演算”的论文，这是关于概率论的第一篇论文。因此波瓦松说：“由一个广交游的人们向一严肃的冉森教派所提的一个关于机会游戏的问题乃是概率演算的起源”。

④网络论几何学。18 世纪东欧的哥尼斯堡城，该城有如图（1-1-2）所示的七座桥。居民经常沿河过桥散步，于是提出一个问题，一个散步者怎样才能一次走遍七座桥，而每座桥只许通过一次，最后回到起始地点呢？这个表面看来很容易的问题，但热心散步的人谁也没找到这样的路线。问题提到数学家欧拉那里，欧拉证明了：这样的走法根本不存在。并于 1736 年公布了他的结果。这就是有名的“七桥问题”。欧拉对这个问题的研究，建立了网络论几何学的基础，与拓扑学有着密切的联系。



图（1-1-2）

⑤哥德巴赫问题。

这个问题是 1742 年 6 月 7 日，德国数学家哥德巴赫在给欧拉的信中提出的猜测：每个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和；1742 年 6 月 30 日，欧拉在复信中写道：“任何不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和，虽然我还不能证明它，但我确信无疑认为这是完全正确的定理。”有人已对 33×10^6 以下的不小于 6 的偶数进行验算，都表明它是正确的。但这个问题的证明至今尚未解决。

⑥费尔马大定理：费尔马提出：“方程 $x^n+y^n=z^n$，当 n 为大于 2 的自然数时是不能有非 0 正整数解的。”费尔马在一本书一页空白上有一段读书笔记：“我得到了一个关于它的使人信服的证明，但是这页边太窄不容我将证明写出来。”费尔马死后，他的儿

子将这读书笔记公诸于众，很多数学家都想给他补一个证明，但很快就发现这并非很容易的，直到100年后欧拉证明了$n=3$、4的情况，经过数学家们200多年的努力，直到1994年，才由英国数学家安德鲁·维尔斯给出了完整的证明。

⑦罗巴切夫斯基几何的产生。由欧氏几何第五公设的不明显性，许多数学家试探对公设进行证明，两千年来不得其结果。很多优秀数学家给出的所谓证明都犯有逻辑上的错误，偷用了与第五公设等价的命题。最后罗巴切夫斯基断定第五公设不能证明，而另外的假设也不会推出矛盾，从而发现了非欧几何。

通过上面例子可以看到：数学问题的来源有的是通过生产、生活、游戏等形式从外部世界所提出，也有的是纯粹由思维领域所提出。但总的看来，大多数数学分支那些最初、最老的问题，是起源于经验的，是由外部现象世界所提出的。我们说数学是某种起源于经验的东西，是来自外部世界的，正是在这个意义下而言的。

二、数学对现实世界反映的能动性

数学思维对现实世界的反映是一种能动的反映，这种能动性主要表现在：

①纯化。现实世界的量的规定性并不是以孤立的形式出现的，是与质的规定性结合在一起的。数学的抽象，由于撇开现实世界事物的各种质的属性，从而得到完全脱离自己内容的纯粹的量的关系。现实世界5头牛、5只鹿，数学中纯化为“5”。现实世界圆木板、圆月、车轮——数学中纯化为“圆”。“几何学得出自己的定理是，它从具体对象中抽象出来，把各种对象看成没有具体性的物体，它所规定的不是某些具体对象之间的具体关系，而是没有任何具体性一般物体之间的相互关系。”[1] 经过纯化后的量

---

〔1〕 斯大林：《马克思主义和语言学问题》人民出版社，1950年版，第16页。

的关系形成为一种“思想事物”。这种抽象的思想事物就成了数学研究中所直接处理的对象，所以数学是一种研究“思想事物”的科学。

②创造。进一步研究这些纯粹量之间的变化、相互关系，也就是与纯粹量的逻辑范畴打交道。人的思维可以创造出一系列更为抽象、更为高级、更为深刻、更为普遍的概念。比如虚数、多元数、理想数、四维空间等……比如对满足一定运算的数的研究创造了行列式的概念，线性方程组的解法中创造了矩阵的概念。由某种满足一定运算的集合可以创造出群、环、域的概念等等。

③想象。想象与幻想是思维能动性在数学中的集中表现。“在数学上也是需要幻想的，甚至没有它就不可能发明微积分”[1]。比如微分三角形就是一种幻想的量，是在差分三角形的启示下设想出的一种处于纯粹状态中的三角形。n 维、无穷维空间也是一种想象的量。进一步发展的抽象空间，把函数看成“点”，这实际上是空间的某种想象中的模拟物，无穷远点、无穷远直线本身只有借助丰富的想象才能设想。

数学中把圆柱体看成矩形绕一边旋转一周而生成，球看成半圆绕直径旋转一周所生成，这都要借助想象。事实上没有想象也就不能有发现与创造。比如构造“处处连续处处不可微的函数”，由一个点连续而不可微出现尖点，可以想象如果无限多尖点稠密分布将会每个点处处都连续，但都不可微。

④数学以一个真正提问者的身份出现。它借助于逻辑组合，一般化、特殊化、巧妙地对概念进行分析综合提出新的富有成果的问题。因此，思维的这种自由、能动的作用，本质上只是由来自经验的初始概念和原理合乎逻辑的发展。

比如，当建立了连续、可微概念之后，很自然地要细致区分这两个概念，提出连续是否可微？可微是否连续？既然连续、可

[1] 《列宁全集》人民出版社，1963年版，第33卷，第286页。

微都是就局部定义的，如何推广到一个区域？一个区域上函数间断点可以有多少？存在［0，1］上有理点间断无理点连续的函数吗？如果存在请找出例子来。既然连续是可微的必要条件，是否存在每点都连续每点都不可微的函数？……数学研究中经常是这样一步步地为自己提出问题而想办法加以解决。

正是由于思维的能动作用，使现实世界中的量的关系纯化为数学概念——脱离具体的质与内容，取得比其他自然科学较高抽象的形式，而后又由思维的能动作用得出了一系列更为抽象的思维的自由创造物与想象物。因此，思维的能动作用使数学“王国”开满了绚丽的抽象思维的花朵，数学表现出极度抽象的形式，成为与现实相对立、脱离外部世界的东西。

下面我们以虚数的产生为例具体地说明数学与现实世界的辩证关系。

16 世纪 30 年代，人们找到了求解一元三次方程的一般解法，最早记载于卡尔丹(Cardano)的著作《重要的艺术》(1545 年)中。

任意给定实系数三次方程：$y^3+ay^2+by+c=0$，

令 $y=x-\frac{a}{3}$，可变换为 $x^3+px+q=0$，

其中　$p=-\frac{a^2}{3}+b$，$q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$，

因此只须研究缺少二次项的三次方程即可。

对于一元三次方程　$x^3+mx=n$　(1)

引入辅助未知数　t、u

令
$$\begin{cases} t-u=n & (2) \\ tu=\left(\frac{m}{3}\right)^3 & (3) \end{cases}$$

不妨设 $n>0$，即 $t>u$，

即

$$\begin{cases} t+(-u)=n \\ t(-u)=-\left(\frac{m}{3}\right)^3 \end{cases}$$

所以，t 与 $(-u)$ 为 $z^2-nz-\left(\frac{m}{3}\right)^3=0$ 的两个根，

$$z=\frac{n\pm\sqrt{n^2+4\left(\frac{m}{3}\right)^3}}{2}=\frac{n\pm 2\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}{2}$$

$$\therefore\quad z_1=\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3},\; z_2=\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$

于是，

$$t=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}+\frac{n}{2} \tag{4}$$

$$u=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}-\frac{n}{2} \tag{5}$$

令 $$x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$$

代入(1)检验知：

$$\begin{aligned}
&(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})^3+m(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})\\
&=t-3t^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}+3t^{\frac{1}{3}}u^{\frac{2}{3}}-u+m(t^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{1}{3}})\\
&=(t-u)-3t^{\frac{1}{3}}u^{\frac{1}{3}}(t^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{1}{3}})+m(t^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{1}{3}})\\
&=n-3(tu)^{\frac{1}{3}}(t^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{1}{3}})+m(t^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{1}{3}})\\
&=n-3\left[\left(\frac{m}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}(t^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{1}{3}})+m(t^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{1}{3}})\\
&=n-m(t^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{1}{3}})+m(t^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{1}{3}})=n
\end{aligned}$$

即 $x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$ 为方程(1)的一个根。

在解 (1) 型的数字系数方程时，卡尔丹遇到了所谓“不可约情形”：当 (4)、(5) 不能在实数范围求出 t，u 的情况下，三次方程 (1) 却有正实根。

例如：方程 $x^3-15x=4$，容易检验 $x=4$ 为它的根，但用求根公式计算时要$\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{-15}{3}\right)^3}=\sqrt{-121}$是实数范围内不能允许的运算。所以不能利用公式 (4)、(5) 去求 t 与 u。

然而，如果从$(\sqrt{-1})^2=-1$ 出发，将 $\sqrt{-1}$依实数运算法则

进行演算，却得出了 $x=4$ 这一正确的结果。

推演如下：由公式(4)得 $t=2+11\sqrt{-1}$

由公式(5)得 $u=-2+11\sqrt{-1}$

$\because\ 2+11\sqrt{-1}=(2+\sqrt{-1})^3,$

$-2+11\sqrt{-1}=(-2+\sqrt{-1})^3$

$\therefore\ \sqrt[3]{t}=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}$

$\sqrt[3]{u}=\sqrt[3]{-2+11\sqrt{-1}}=-2+\sqrt{-1}$

由 $x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$ 得出

$$x=(2+\sqrt{-1})-(-2+\sqrt{-1})=4.$$

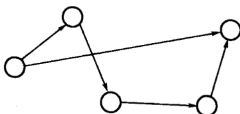
也就是，如果把 $\sqrt{-1}$ 当做一个数，按实数运算法则施行运算，公式 (1) 就具有了普遍性。正是解一元三次方程所得的经验，提示人们把 $\sqrt{-1}$ 设想成一个"数"，因此才得出了虚数这种思维的自由创造物与想象物。可见 $\sqrt{-1}$ 虽不直接从现实世界得来，然而它并不是"先验"的产物。此后，1572 年意大利数学家邦别利确定了复数的运算，人们又类比实变数函数建立了复变数函数，这些都是在思维能动作用下开出的花朵。后来复数找到了几何解释并在流体力学中得到了成功的应用。证实了 $\sqrt{-1}$ 确实是现实世界数量之间的一种合理的相互关系。这一事例说明：数学以最纯粹的形式体现了人的认识的主观能动性。

三、数学极度抽象的形式，更深刻、全面地反映着现实

1. 数学的极度抽象的形式只是在形式上与现实相对立，在内容上与现实世界有着密切的联系。

许多抽象的数学量、数学思想可以在现实中找到它们的原型。具有相反意义的量可以作为正、负数的原型；探照灯、手电筒的光束可以作为射线的原型；直的铁轨、麦垅可以看作平行线的原型；用砖砌圆烟筒，可以看作以直代曲思想方法的原型；踢足球时的足球传递，如图 (1-1-3) 可以解释向量加法的模拟物；阳光

照射矩形玻璃窗的影子为平行四边形，可以看作射影变换的原型。


图 (1-1-3)

几何上图形的全等，就是现实中两个物体互相贴附重合在一起的实际操作过程的模拟，画在橡皮膜上的图形当拉伸变形时可以看成拓扑变换的原型，在《自然辩证法》一书中，恩格斯专门讨论了数学中的无限的现实原型；n 维空间是极度抽象的概念，当理解 n 维空间的点是由 n 个独立变量所确定时，具有6个自由度的刚体就可以看成是6维空间中的点。这样就可以用六维空间的点的运动来描述刚体的运动。在有些力学系统——如梁的振动问题，具有无穷多的自由度，就要用上无限维空间的几何学与微积分学。

1930年量子力学产生以后，使用了一个新的函数 δ—函数。其定义如下：

$$\delta(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\neq 0\\ \infty & \text{当 } x=0\end{cases}\quad \text{且}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$$

对 $\delta(x)$ 的原型，可用压强函数来说明。

例如：火车过桥时，计算桥面受压情况。为简单计算，只考虑一个轮子的压力与压强，从理论上看车轮与桥面铁轨接触只一个点，设车轮对轨道压力为1，接触点设为坐标原点，铁轨为坐标轴，这时在 $x=0$ 时，(如图1-1-4) 压强为

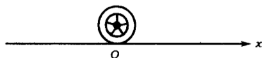


图 (1-1-4)

$$p(0)=\frac{\text{压力}}{\text{接触面}}=\frac{1}{0}=\infty$$

在 $x\neq 0$ 的点，因无压力，$\therefore p(x)=0$，另外我们知道压强函数积分等于压力，所以：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1$$

成立。

故 $p(x)$是一个 δ—函数。

像 δ—函数这种被数学家一时认为背理的函数，也可以找到现实中的类似物。说明这个由思维创造的函数，反映了从现实到概念的曲折的抽象过程，这个函数在量子力学中的成功应用，证明了它深刻地反映着现实的内容。

再如，纤维丛是很抽象的数学理论，表面看与物理世界的结构无关，实际上，规范场（电磁场是它的最简单的例子）的概念是和纤维丛理论里一些数学概念完全相同。见表(1-1-1)。

表(1-1-1)

规范场术语	丛的术语
规范（或球面规范）	主坐标丛
规范型	主纤维丛
……	……
电磁现象	U_1 上的联络
……	……
电磁理论（不带有单极子）	平凡的 U_1 丛的联络
电磁理论（带有单极子）	非平凡的 U_1 丛的联络

由于数学家发展丛的理论完全没有涉及对物理世界的认识问题，杨振宁曾和陈省身谈及自己的感想，他说："这既令人惊奇又令人困惑，因为你们数学家能无中生有地幻想出这些概念。"陈省身立刻反驳道："非也、非也，这些概念并不是幻想出来的，它们是自然的，而又是真实的。"[1]这件事实对我们认识数学与现实世界

〔1〕 杨振宁：《磁单极、纤维丛和规范场》，《自然杂志》第2卷第1期，1979年1月。

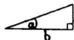
的辩证关系是很富教益的。数学家从自己的经验中确实感觉到数学的抽象形式只是在表面上掩盖了它的现实起源。“思维和客观世界服从于同样的规律，因而两者在自己的结果中不能互相矛盾，而必须彼此一致。这个事实绝对地统治着我们的整个理论思维。这是我们的理论思维的不自觉的和无条件的前提。”

2. 数学极度抽象使它具有高度的概括性，数学达到了对事物量的本质联系的认识，反映着各种不同类型的具体对象中量的共同规律。因此，数学才可以广泛应用到各种不同的具体对象中去。

例 1. 二次函数 $y=\frac{1}{2}ax^2$

$$y=\frac{1}{2}ax^2\begin{cases}\text{自由落体运动}\quad S=\frac{1}{2}gt^2\\ \text{运动物体的动能}\quad E=\frac{1}{2}mv^2\\ \text{半圆的面积}\quad A=\frac{1}{2}\pi r^2\\ \text{直角三角形的面积}\ S=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{tg}\alpha\cdot b^2\end{cases}$$

例 2. 导函数：$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$



可以刻画运动物体瞬时速度；也可刻画切线的斜率；物质的比热；电流的强度等。

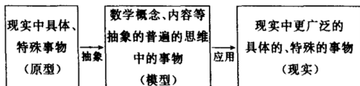
例 3. 双曲型偏微分方程，在弹性力学中描写振动；在流体力学中描写流体动态；在声学中表现为声压方程；在电学中表现为电报方程。双曲型偏微分方程反映着这些不同对象在数量上的共同属性。正如列宁所说：“自然界的统一性显示在关于各种现象领域的微分方程式的惊人的类似中。”

3. 数学的高度抽象性反映着物质多样性中的统一性，这形成了数学在现实世界中有着广泛适用性的特点。

正由于数学高度抽象性与广泛适用性的辩证统一，使数学成为打开一切科学大门的钥匙（Roger Bacon：数学是科学的大门和

钥匙)，数学是自然科学的助产婆。不仅所谓精确科学，如物理学、化学已越来越需要较多较深的数学，甚至过去认为以描述为主，与数学关系不大的生物学、经济学等，也处于日益“数学化”的过程中（如图 1-1-5）。

从现实原型到数学模型再到应用这个全过程，反映了数学理论的螺旋式的发展。



数学抽象思维的每一项认真的、能够揭示某种规律性的贡献，不论它是否出自明显的应用目的，迟早总会得到应用的。公元前 200 年希腊几何学家阿波洛尼乌斯的“圆锥曲线论”，是经过 1800 年才得到了在光学抛物镜研究和天体运动理论中的具体应用的。一些抽象数学理论一时得不到应用，往往是生产水平和科学理论及实践还没达到它可应用的地步。

四、思维与现实的相互作用是数学活力的源泉

数学的发展中，纯粹思维的能动作用与不断汲取现实世界的真实关系反复相互作用、相互交错地进行着。比如古代的黄金分割、Fibonacci 数列，由于优选法的理论发展而得到重新研究而放出光彩。古代几何三大难题一直得不到解答，而后在代数中发现群论以后，于 1882 年才宣告结案，证明了这是“尺规作图不能问题”。正如希尔伯特曾指出的：当纯思维的创造力进行工作时，外部世界又重新开始起作用，通过实际现象向我们提出新的问题，开辟新的数学分支，而当我们试图征服这些新的、属于纯思维王国的知识领域时，常常会发现过去未曾解决的问题的答案，这同时就极有成效地推进着旧的理论。本世纪大数学家 Richard courand 在 1962 年希尔伯特诞生百周年纪念时也曾深刻地指出：“活的数

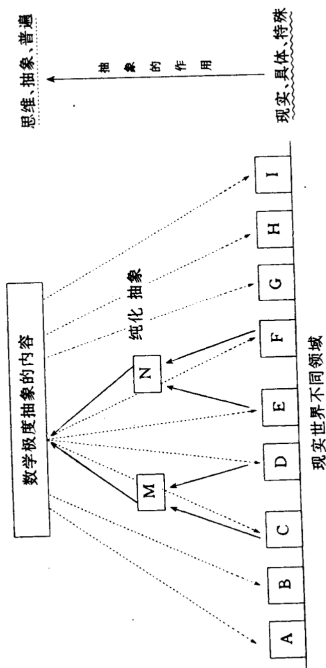


图 (1-1-5)

学在直觉威力和逻辑威力这两个对立面之间往返，在扎根于现实的问题的特殊性和广泛抽象化的普遍性这两个对立面之间往返，这种对立是活力的源泉。”

思维与现实的相互作用是辩证的，人的认识不是沿直线前进，而是无限地近似于一串圆圈，近似于螺旋的曲线。夸大认识的某一局部，就会产生片面性，把数学的高度抽象性片面夸大以致走向极端，往往导致否定数学的客观基础；否定思维对现实反映的能动性，否认在数学中思维的自由创造与想象，又会对数学陷入机械唯物论的认识，这两种片面性对数学发展同样是有害的。只有在思维与现实世界的辩证统一中才能把握住数学的特点和本质。

思考题

1. 如何理解纯数学是某种起源于经验、是来自外部世界而后又脱离外部世界的东西呢？

2. 为什么数学极度抽象的形式更深刻、更全面地反映着现实？

3. 试举五例，说明数学内容的现实原型。

第二节 数学理论与实践

现实世界的量与量的关系，是客观存在的、第一性的。数学知识是客观世界量的关系在人们头脑中的反映、是第二性的。那么，客观世界的量的关系是通过什么方式才被人们认识的呢？是通过人们的实践。这一节我们主要分析数学理论与实践的相互关系。

一、数学的发生与发展依赖于社会实践

恩格斯在《反杜林论》中已经明确地讲过：“数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿

产生的。”也就是说，数学是在人的有目的的活动，特别是有目的的改造客观世界的活动中产生的。数学的产生、发展是如何依赖于实践的呢？

第一，从数学知识的发源来看，人们的社会实践是数学知识的源泉。算术（Арифметика）源于希腊语，“Арифмое”是数，“Техне”——艺术，所以算术是计算的艺术。几何学起源于土地丈量术，几何学希腊文原意就是“土地测量”。“гз”土地，“метрео”量度。正如古希腊学者罗德的欧第姆斯在公元前4世纪所写的：“几何是埃及人发现的，从测量土地产生的，因为尼罗河水泛滥，经常冲去界限，所以这种测量对埃及人是必需的。这门科学和其他科学一样，是从人类的需要产生的，对于这一点是没有什么可惊异的。任何新产生的知识都是从不完善的状况过渡到完善的状况。知识通过感性的感觉而产生，逐渐成为我们考察的对象，而最后变成理性的财产”[1]。比较有趣的证据是：古代的中国与希腊对勾股定理都发现的比较早，这是因为勾股定理与测量面积、定方向有直接关系。勾股定理在西方叫毕达哥拉斯定理，“据说毕达哥拉斯发现这个定理的时候，举行了一个百牛大祭……并且引人注目的是，他竟这样的快活，以致举行盛宴，把富人和全体人民都邀请了；这番辛苦是值得的。这是精神（认识）的快乐和喜悦，——然而牛遭了殃。”[2]在中国古代，早在夏禹治水时，由于要测山望高，而积累了大量的几何知识。“禹治洪水，决流江河，望山川之形，定高下之势……乃勾股所由生也。”[3]到春秋战国、秦汉时代，不但用勾股定理来测量水利，而且进行了太阳与地面距离及太阳直径大小的天文测算。到三国时代，这种方法进一步发展为“重差术”，已经蕴含了许多现代三角学知识的胚芽。三角

〔1〕 亚历山大洛夫等《数学，它的内容方法意义》第1卷，科学出版社，1995年版，第21～22页。
〔2〕 恩格斯：《自然辩证法》人民出版社，1971年版，第167页。
〔3〕 《周髀算经·九章算术》上海古籍出版社，1990年版，第5页。

学一词来源于希腊字母"тригонон"——三角形,和"метрайн"——测量,也恰说明三角学来源于用三角形进行的天文及大地测量的需要。

第二,从数学知识的发展来看,社会实践的需要是数学发展的实际支点与刺激。

为什么一个数学规律在这个时代被认识,另一个数学规律在另一个时代被认识?这与社会实践的需要、生产、科学技术水平、以及数学知识积累的程度有着直接关系。在古代,有的数学家有过很天才的见解,在计算面积时有了类似于现代积分的思想,然而微积分不是诞生在古代,而是诞生在生产力有较高水平的17世纪。这完全与社会实践的需要有关系。微积分产生的社会实践条件是什么呢?

其一,资产阶级进行大量的海洋探险,寻找殖民地和原料市场,远洋航行的船只,船底做成什么形状才能经得住风浪?其二,由于机械的使用,出现了许多机械曲线,这些曲线是过去的几何学中很少研究的。"从17世纪中叶以来,几乎所有大数学家,只要他们研究应用力学,并把它从理论上加以阐明,就都从磨谷物的简单的水磨着手的。"[1]也就是对任意曲线、变速运动的研究。其三,为了航海,就要靠观测天象定位,就要搞天文仪器,透镜制造就要求计算抛物线的切线的斜率。其四,航海、天文要求准确的计时工具,而圆周摆摆幅越大,周期越长,不能准确地计时。这样就提出了一个问题:摆沿怎样的曲线运动,它的振动周期才可以与振幅无关?也就是要求求出一条等时曲线来。其五,战争的需要,要求研究弹道曲线,也就是对抛物线运动的研究。其六,天文学中开普勒三大定律的提出,要求对椭圆及其性质作深入进一步的研究。正是在资本主义生产发展推动下,当时提出了一系列的数学课题,正如马克思所说:"机器在17世纪的间或应用是

[1] 《马克思恩格斯全集》第30卷,人民出版社,1963年版,第319页。

极其重要的，因为它为当时的大数学家创立现代力学提供了实际的支点和刺激。"[1] 正是由于17世纪资本主义兴起时期社会实践的迫切需要，才产生了欧洲17世纪数学上的三大发明：主要是笛卡儿制定了解析几何，由耐普尔制定了对数，由莱布尼茨、还有牛顿制定了微积分。

另外，关于方程解法的研究，也可以说明这个情况。一元一次、二次方程在生产与生活实践需要中屡见不鲜，不必细说。一元三次方程，在土方计算中就要碰到，如我国由于隋代大兴土木工程，就需要解决一系列的一元三次方程求解（正根）问题，并创造了"带纵开立方法"，记载于唐王孝通的《辑古算经》中。由于计算五年计划平均增长率的需要，促使数学家研究五次方程 $x^5+x^4+x^3+x^2+x=L$ 的近似根的快速解法。因为这种方程是计划工作中经常遇到的。在1801年元旦，人们发现了一个被命名为谷神星的小行星，由于对于这个新的小行星当时只有很少的观测数据，于是就提出了一个根据少量观测资料确定它的轨道的问题。高斯最后完全解决了这个问题，这一问题引出了一个一元八次方程的求解的研究。

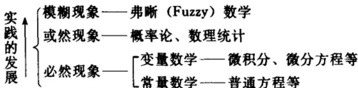
由于现代生产技术与科学的迅速发展，数学问题的现实来源更加广泛了，尽管19世纪以来数学日益取得更加抽象的形式，但社会实践始终是数学发展的实际的支点和刺激。由于探讨跨声速飞行推动了混合型偏微分方程理论的研究。而泛函分析理论的发展，则是由量子力学和电动力学问题、计算技术问题、物理学和技术的统计问题等等所推动的。60年代初我国数学家们创造的解椭圆型微分方程的系统化计算方法——有限元法，短短十年中就已成功地应用于几十个科技领域。实践的需要促进了有限元法的研究与逐步完善。

第三，从数学研究的手段与领域看，随着社会实践的发展，特

[1] 马克思：《资本论》第1卷，人民出版社，1975年版，第386～387页。

别是生产科学技术的飞速前进，不但为数学研究开辟了日益增多的新领域，而且为数学研究提供了新的手段。

例如，古代人们只有算术、代数和欧氏几何等初等数学知识，由于资本主义大生产的发展，出现了变量数学的各个领域和分支。20 世纪下半叶以来，由于宇宙航行、原子能利用、电子计算机和自动化等许多新成就，不断为数学开辟了新的领域，如程序设计和算法语言的研究。为了识别图像而产生了弗晰（Fuzzy）数学这一新的分支，数学王国的疆域随着社会实践的发展而在日新月异地扩大着。



另外，圆周率的计算水平的发展是个很好的例证。

古代人由于生产力水平所限，不可能有先进的计算工具和思想方法，局限着人们对数量关系的认识。西方阿基米德求出 $\pi=3\frac{1}{7}$，认为“最好的方法是把直径乘以 $3\frac{1}{7}$，这是最迅速最简单的方法，只有上帝才知道比它更好的方法了”。

刘徽首创割圆术，求得 $\pi\approx3.14$。

祖冲之造“缀术”，用筹算求得 $3.1415926<\pi<3.1415927$。

16 世纪数学家鲁道夫用了毕生的精力，才求得 π 的 35 位数字，

$\pi=3.14159265358979323846264338327950288$

死后被人刻在墓碑上，以示纪念。

1949 年，由于电子计算机的发明和使用，仅用了 75 小时就算出了 π 的 2035 位数值，到了 1995 年，由于高速电脑的发展，数学家已计算到 π 的小数点后 64 亿位。有许多过去不能用数字计算来提供资料的数学课题，现在由于计算的进步使可分析的数据材料增加而获解法。电子计算机的应用，不但加快了数学应用的速

度，而且为数学研究提供了新的手段。如应用数学中微分方程孤立子解的获得，就是首先在计算机的荧光屏上发现的。随着四色问题的证明在计算机上的实现（100 亿逻辑判定，1200 机器小时）提出了对机器证明数学课题的探讨。数学研究也逐步跻身于科学实验的行列之中。不少数学家估计：未来的数学将是一幅更为生动、更为变化多彩的图景。

第四，从数学内容的客观性来看，实践是检验数学内容的客观真理性的标准。

数学相对于其他自然科学而言，有着严谨的逻辑性，那么，这种通过严谨的逻辑方法而建立起来的数学理论的客观真理性还要不要实践检验呢？这个问题曾引起过争论。我们认为，实践同样是检验数学内容客观真理性的惟一标准。

数学的发展有平常时期，这种时期是数学内容按逻辑的顺序在量的方面进行积累。数学发展还有非常时期，即在思想、方法、观点上产生新的飞跃与变革。数学内容的客观真理性问题在数学发展的平常时期矛盾并不突出，但在数学发展的非常时期往往产生这样的事情：一个数学上的新概念、新方法的产生，按原有数学理论来“审判”简直是荒谬的。然而实践不断确认了这种新概念、新方法的“生存权利”，从而推动了数学的发展。①微积分产生初期，在理论和数学推理的严格性上很不完善，曾遭到正统派数学家的反对，但后来，这些人不得不“嘟嘟哝哝的让步了”，因为这个方法用来解决实际问题时“得出的结果总是正确的”。②数学中 δ—函数的出现对原有传统的函数概念可谓大逆不道！按传统函数定义来检查，δ—函数没有存在的理由。但是 δ—函数在量子力学中成功地应用证明了它对现实事物相符合，使人们不得不反过来拓广函数概念，发展出广义函数论的内容。③量子电动力学中的“重整化”理论，计算高精度地符合于实验，从而使人们不得不反过来探求减法程序可能的数学基础。正如当代法国数学家弗雷协（M. Frechet）所说：“数学，在由现实世界生出之后，还

必须不断的证实它自己的生存，即用实验检证它所达到的预见来证明它对现实事实的适合。”这表明，数学内容是否具有客观真理性，最终只能依赖于实践检验来确认。其理由是：其一，数学研究中检查证明推理过程是否正确，只是检查了形式逻辑工具的使用有无错误，只能判别数学推理在逻辑上有无矛盾。诚然，逻辑上无矛盾是正确思维的必要条件。但是，合乎形式逻辑并不能最终解决数学客观真理性的问题，因为形式逻辑管不了大前提，尽管我们知道，“如果我们有正确的前提，并且把思维规律正确地运用于这些前提，那末结果必定与现实相符。”[1]然而前提是否符合客观现实，这是数学本身无法检验的，比如前提是

$$2>3, \Rightarrow 2+1>3+1 \Rightarrow 3>4。$$

这在逻辑上没毛病，关键是前提 2> 3 是否是客观世界的真实的量的关系？这只能由实践来检验。其二，由于数学要在理想的条件下考虑问题，往往要将前提简化。经过极度抽象、简化而得到的前提，在相当成分上具有假设的性质，它是否符合客观实际，这只能在应用数学理论于实践的过程中进行检验。希尔伯特在《论无限》中认为：“欧几里得几何学固然是一个本身没有矛盾的体系和概念系统；但是并不能由此得出结论说，它在现实世界中是成立的。情况是否这样，只能由观察和经验来判断。”其三，在数学研究中有些前提并非直接从现实世界抽象得来，而只是逻辑分析中的一种假定。由这种完全假设的条件经过正确逻辑推理而得出的数学结论是否具有客观真理性，就更需要在应用数学理论于实践的过程中进行检验了。比如：非欧几何理论是用与欧氏平行公设相反的命题的假设条件代替欧氏平行公设并经过逻辑推导而建立起来的。这种几何学从逻辑推导中找不出什么毛病，然而这样的假设的前提是否反映了现实世界的空间形式这个问题，却是逻辑本身不能证明的，就连罗巴切夫斯基本人也谨慎地称它为“虚

[1] 《马克思恩格斯全集》第 20 卷，人民出版社，1963 年版，第 661 页。

拟的几何学”,并设想观测大范围的三颗恒星之间三角形内角和是否小于 180°来检验自己的理论。后来克莱因等人在欧氏几何中构造了非欧几何的模型,以欧氏几何为媒介对非欧几何进行了验证。特别是非欧几何在相对论中成功地应用之后，实践检验了它的内容的客观真理性，非欧几何才被作为真正的科学理论并获得了充分地发展。可见，数学理论是否具有客观真理性，这最终是一个实践的问题。

检验数学内容的客观真理性，并不是要求一个定理一个定理地去检验，因为许多定理只是构成数学理论体系的不可缺少的逻辑环节。我们是对数学理论体系进行检验，看其是否与现实世界的量的关系相适合。

当然就具体检验方式而言，有直接检验，如运筹学、优选学、规划论等来自生产实践需要又满足多快好省的效果，就检验了这些理论的客观真理性。另外还有间接的检验。这是比较普遍的情况,通过数学理论应用于其他自然科学技术的间接形式的检验。这里对一个数学理论要么检验其前提(公理系统),要么其前提是假设的，而通过其理论体系的应用来检验。即首先应用数学理论解决自然科学理论问题,而当这一自然科学理论一旦被实验所证实,也就以间接的形式检验了数学理论的客观真理性。

比如费德洛夫应用群论于理论结晶学，找出晶体所有可能的对称形式共 230 种。现代物理学观测研究了 8000 以上的晶体，均符合费德洛夫的理论分析。“规则点系的第一个结果,同时是在研究晶体领域人类智慧的第一次凯旋。于是由研究室深处得出的论断与同时采用巨大规模的广泛实验形成的结果完全一致。”[1] 科学实验证实费德洛夫理论的同时，也间接地检验了群论的客观真理性。于是,“群表示”理论结合着自然现象的研究而发展起来了。

在数学发展对实践的依赖关系中，最基本的是对物质生产实

[1] Е. С. федоров. 《Симметрия и структура кристаллов》第 111 页。

践活动的依赖。这在数学总的历史发展中是最基本的推动力量。恩格斯在自然辩证法札记中指出“科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。”这句话也曾翻译为“科学一开始就是在生产条件下发生和发展起来的。”恩格斯是通过考察17世纪以前的科学发展的历史来证明的。他说：“必须研究自然科学各个部门的顺序的发展。首先是天文学——游牧民族为了定季节，就已经绝对需要它。天文学只有借助于数学才能发展，因此也开始了数学的研究——后来，在农业发展的某一阶段和在某个地区（埃及的提水灌溉），而特别是随着城市和大建筑物的产生以及手工业的发展，力学也发展起来了。不久，航海和战争也都需要它。——它也需要数学的帮助，因而又推动了数学的发展。”

在恩格斯上述的考察中，把整个科学当作了一个整体，即所谓“点模型”来加以考察。因为17世纪以前只有天文学、力学、数学比较发达，其他自然科学还没形成或在襁褓之中。因此，恩格斯这里是从总体上得出：科学一开始是在生产条件下发生和发展起来的这一结论的。就是在这个粗略的考察中，我们也可看到，生产实践的需要首先转化为天文、物理、力学、技术上的问题，而后才进一步转化为数学的问题。可见，数学受生产的影响，一开始就是以比较间接的方式出现的。

此外，数学的发展依赖于实践，这个实践不能片面理解为只是生产实践，因为社会实践既有生产实践，也还有科学实验，科学发展的实际水平。总之数学发展要受一定的社会历史条件所制约。在数学发展史上常常出现这样的巧合，一些重大的发现竟几乎同时被不同的人所完成，例如：

①苏格兰人约翰·耐普尔（1550—1617年），瑞士钟表匠、天文仪器师约勃特·标尔格，彼此完全独立地造出了对数表。

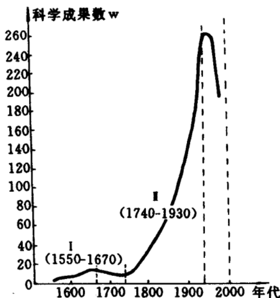
②当笛卡尔（1596—1650年）引入解析几何的新思想时，费尔马（1601—1665年）也独立地提出了类似的见解。

③17世纪下半叶牛顿与莱布尼茨彼此独立地制定了微积分。

④19 世纪初，俄国数学家罗巴切夫斯基、德国数学家高斯、匈牙利数学家亚·鲍耶几乎同时发现了非欧几何的新思想与新体系。这些数学新发现是时代的产物，是人们社会实践发展和科学文化知识积累的必然结果。正如 Wolfgang Bolyai 所说："很多事物仿佛都有那么一个时期，届时它们就在很多地方同时被人们发现了，正如在春季看到紫罗兰处处开放一样。"

二、数学发展的相对独立性

如果对全世界的重大科学成果数作一番编年统计，画出编年曲线，大致图形如图（1-2-1）：



图（1-2-1）

其中，曲线下降时期都是社会生产与经济力量在发展时期。这说明在 17 世纪以后的科学发展中，再把科学当作"点模型"就存在问题了。应该把科学看成是有内部结构的，应该采用"结构模型"。科学发展还要受许多内部因素的相互影响，也就是有着对

社会实践而言相对独立性的发展。

数学依赖于社会实践并不是数学发展的每一步都要直接由实际问题所提出，所推动。数学有着由自身内部矛盾所推动的相对独立的发展。这种相对独立性主要表现为：

1. 在数学发展的一定阶段，由于对已经积累的丰富材料的分析，也会提出一些数学理论上自身的矛盾，解决这些矛盾的过程有时还可以导致数学新学科的建立。例如：研究代数方程在什么条件下具有根式解，最后导致一门崭新的理论——群论的诞生；试尝证明欧氏几何第五公设的研究，最后导致非欧几何新体系的确立。复变函数整个理论体系的建立则是在相对独立的状况下形成的。

2. 可以从一组假设的公理出发，进行逻辑推导而得出一些结果。比如从不满足阿基米德公理的条件出发可以导致非阿基米德几何。

3. 一个数学分支的概念与方法移植应用于另一数学分支时，往往也导致建立新的学科与得出新的结果。比如用分析方法研究数论问题开辟的解析数论这一新领域至今仍是解决古老数论问题的强而有力的工具。

4. 人们可以从数学内部矛盾提出问题，预测和展望一个时期数学发展的动向。比如第二次国际数学会议（1900 年，巴黎）上，德国哥廷根大学教授希尔伯特发表了著名的《数学问题》的演说。他站在 19 世纪数学研究的最前沿，提出了 23 个数学问题，预测了 20 世纪的数学研究将围绕这些问题展开。虽然 20 世纪数学发展远比希尔伯特设想的更为广阔，但它提出的 23 个问题确实对 20 世纪数学的发展有着深刻的影响。不少数学家被这些问题的深刻背景和重大意义所吸引，贡献了毕生的精力。随着这些问题的解决，出现了许多数学新分支，创立了不少新方法。比如 1976 年美国一些著名数学家评选 1940 年以来美国数学的十大成就中，其中有三项是解决希尔伯特第一、五、十三问题的。希尔伯特的 23

个问题，至今仍有半数以上没有解决，解决这些问题，往往标志一个国家基础理论研究的水平，对数学家个人也是极高的荣誉。为什么这23个问题会具有这样大的魅力呢？根本原因在于它是数学体系内部矛盾运动的必然要求。杰出的数学家从科学实践中抓住主要矛盾提出问题，往往成为未来数学发展的新的“生长点”。在发展基础理论研究中，这种“生长点”是很值得注意的。

5. 数学家个人的爱好，一个数学学派的风格，往往也影响着数学的研究方向。比如1795年10月高斯就读于哥廷根大学时，面临选择研究数学还是研究古代语言的痛苦，然而1796年3月30日，他惊人地发现了正17边形的尺规作图法。影响高斯选择数学作为他的终身职业。显然，这并非实际的要求而只是个人的兴趣。1800年以前，数学家人数很少，居住分散，也没有学生能作适当交谈，随着19世纪大学的发展以及搞研究的学者日益增多，就出现了可以称为学派的数学家集体。所谓数学学派，是指对数学的本质、原理与方法具有共同的群体约定的数学家的集合。一个学派往往具有连续不断的传统、共同的大师、偏好的主题或方法。具有群体性与内聚力。数学学派对数学思想与知识的传播，对优秀数学家的培养，对数学合作与交流都有显著作用。这些也在一定程度上影响着数学的发展。

以上这些事实充分表明了数学发展具有对社会实践的相对独立性。正如希尔伯特曾说的：“随着一门数学分支的进一步发展，人类的智力，受着成功的鼓舞，开始意识到自己的独立性。它自身独立地发展着，通常并不受来自外部的明显影响，而只是借助了逻辑组合、一般化、特殊化，巧妙地对概念进行分析与综合，提出新的富有成果的问题。”这里，希尔伯特指出了：相对独立发展主要运用逻辑组合、一般化、特殊化、巧妙地对概念进行分析与综合这几种方式。法国数学家J·丢东涅也指出：“似乎存在这么一种相当正确的观点，即数学发展的主要动力是内在的原因，也就是对于要解决的问题本身的深入思考，而问题的来源如何关系

不大。在每一个时期，数学家面对前人遗留下来的问题或同时代人提出来的问题。数学问题得到解决往往靠经验的摸索，巧妙的想法使得他们部分或整体地达到目的，但他们不一定了解其中有什么理由。”

数学发展的相对独立性，一般只是在数学发展的一定阶段上才充分表现出来。在这种情况下，数学理论的发展可以也应该走在生产与科学实验等社会实践活动的前面，为他们作好理论的储备，成为研究自然科学现象的良好工具和解决工程技术问题的有效方法。比如 20 世纪初，为克服黎曼积分的局限性建立了“勒贝格测度和积分理论”，创造性地提出分割函数值区间取和式极限的思想。1903 年勒贝格发表著名的《三角级数论》时只 28 岁，当时他的思想受到大数学家 Poincare 的讽刺：“从前一个人发现一种新函数是为实用，今天一个人发现一点函数目的是学习指责我们父辈论证上的缺点。”著名的 Hermite 则对“研究没有导数的函数”表示厌恶和恐怖。当勒贝格去参加数学会议时竟成了不受欢迎的人。分析学家说：“我们这里研究有导数的函数，对你不感兴趣。”几何学家说：“我们这里研究有切平面的曲面。”但今天就不同了。勒贝格积分的重要性日益明显，一些数学家甚至提出大学不讲黎曼积分，直接讲勒贝格积分即可。勒贝格积分在现代控制论、信息论等实用科学方面也是不可少的工具。有的数学学科脱离实践以后的相对独立发展阶段甚至可以达几千年之久最后才找到应用。比如，数论产生之后几千年来一直被作为纯理论来研究而找不到实际应用，但在今天，初等数论的许多结果在计算方法、代数编码、组合论、计算机学科等领域内得到了广泛的应用。例如用孙子定理测距、用原根和指数计算离散傅立叶变换等。正如美国 Knuct 所说的：“我发现实质上初等数论中每一个定理，在跟使用计算机进行高速数值计算的问题相联系时，便自然而然地引申出来。”就是数论中许多较深刻的结果也得到了应用，如在近似分析、差集合、快速变换等方面的应用。

在近代的科学发展中，数学的相对独立性更为突出。“恰恰是在数学的兴趣中心处最重要的数学理论也同时就是物理中最需要的。”(D. Hilbert. Gesammelte Abhandiungen，3. Bd，1935) 如下表（1-2-1）所列各例。

表（1-2-1）

理论名称	初创年代	应用年代及领域	历时
矩阵理论	1860 年	1925 年，描述原子系统中矩阵力学的基本数学工具	65 年
张量计算	19 世纪 70 年代	20 世纪头 10 年，爱因斯坦相对论	30 年
微分及积分算子的本征函数展开理论	希尔伯特于 1906—1910 年	1927 年，应用于波动学	20 年

正如J·丢东涅所说：“当近代物理学（相对论及量子力学）产生革命性的概念时，人们会很惊讶地看到，发展这些概念所需要的数学工具已经被数学家想到并且进行过研究。而数学家完全是从数学的内在的问题出发，而且毫不怀疑有朝一日会产生出另外的应用。”这正是有经验的大数学家的有哲理性的经验之谈。从这个意义上我们可以说：数学（特别是纯粹数学）好比是科学中的工具制造工业，数学家日日夜夜在为人类认识世界提供和改进着各种工具。他可以根据实践直接需要研制这种工具，也可按自己头脑中设想的方案研制这种工具。这些研制的成果储存起来以备人们在开发知识的宝藏中选用。的确，有的工具是常规的，经常被使用着，还有一批工具，上面已经积满了尘土，至今也没有人知道这些古怪的工具的用场，很可能它们找到用场还要等上若干年！不过请你千万不要把这种积满尘土的古怪的工具扔掉或拆毁。要记住这些工具毕竟是人类智慧的结晶，工具的储备可能是长期的。

数学的发展过程是很曲折的。有时社会实践，特别是生产发展了，数学上却呈现出一片空白的状态。比如 1785—1795 年这十

年中就是这样！拉格朗日本人甚至认为数学发现的时代已经终止！这是因为数学发展从社会整体看有个智力积累的过程！这种智力的积累正为下一阶段的智力的突破作准备！

数学相对独立发展阶段产生的纯理论之所以对实践有巨大的指导作用，正因为这些数学理论是基于实践基础产生的历代数学知识继承、积累与发展的结果。数学的发展从某一分支、某一阶段上是从理论到理论，但从数学知识发展的整体、全过程来看，却是遵循实践—理论—实践这个认识规律的。

思考题

1. 数学理论是怎样依赖于实践的呢？试举例分析说明。

2. 为什么数学内容的客观真理性要受实践的检验？

3. 举例分析数学发展的相对独立性。

4. 有人说：搞纯数学研究是脱离实际的，这种观点对吗？为什么？

第二章

数学的对象与方法

第一节 数学的对象、特点及其他

古代的 Proclus 曾说：“所以说数学就是这样一种东西；她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄清智慧；她给我们的内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。”总之，数学是一个多么令人神往的王国啊！我们在讨论了数学客观基础的一般问题之后，对数学的王国进一步进行探讨，仅对数学的对象与其主要特点进行一些初步的概括。

一、数学研究的对象

如前所述，Proclus 对数学的作用进行了极为精彩的描述，但是并没有对什么是数学给以本质的回答。要回答什么是数学，必须要揭示数学研究的对象。恩格斯在《反杜林论》中曾明确地指出：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系。”在自然

辩证法札记中，恩格斯也曾说过：“数学是数量的科学”，“我们的几何学是从空间关系出发，我们的算术和代数是从数量出发。”恩格斯这些论述，准确地概括了19世纪以前数学研究的主要内容，并且这一概括至今仍然有重要的意义。由于近代数学的发展，数学研究的对象已经越出了对数量关系和空间形式最初意义的理解。比如“函数空间”，只是在形式上与一般空间概念有某些类似的一种模拟物。此外，形式、结构、关系等都已成为了现代数学的研究的对象。比如布尔巴基学派就认为最普遍、最基本的数学结构有代数结构、顺序结构、拓扑结构。因此，有的数学家认为数学是研究结构的科学，数学是研究模式的科学。这些都远远超出了原来数量关系的意义。所以对数学研究的对象需要进行进一步的哲学概括，这种概括既要包含对19世纪以前恩格斯所概括的内容，又要反映近一个世纪以来数学的发展与变化。在一般意义下，抽象空间也好，形式、关系、结构也好，本质上都是一种量或量的一种表现形式。因此，依据20世纪以来数学发展的状况来概括，数学不外是研究量和量的变化。所以，从现代数学角度来讲，数学是研究量和量变的科学。其中纯数学是研究纯粹的量的科学，它是数学的基础部分。

对数学研究的对象我们作以下两点说明：

1．从数学与现实世界的关系来看，这些量的关系是现实世界的真实关系，是非常现实的材料。但数学研究中，数学所直接处理的对象则是由现实世界抽象出来经过纯化、加工以概念形式出现的一种“思想事物”。在这个意义下，数学研究的对象是客观世界的量和量的关系的抽象化，是概括化、理想化、模型化了的现实世界的量和量的变化。正如恩格斯指出过的，数学是“一种研究思想事物(虽然它们是现实的摹写)的抽象的科学”。这对正确认识数学研究中直接处理的对象和开展数学科研工作有直接的意义。

2．由于任何事物都有量的规定性与质的规定性，所以数学的对象——量与量的变化，不仅仅存在于某种个别的物质结构层次

和物质运动状态之中，而是普遍地存在于各种物质结构层次和物质运动状态之中。量存在于一切事物之中，贯穿于一切科学领域之内。凡要研究量、量的关系、量的变化、量的关系的变化、量的变化的关系时，就少不了数学。所以，数学作为研究量与量变的科学，它的研究对象较力学、物理学、化学、生物学等自然科学的研究对象具有普遍性的特征。由于数学研究对象的这一基本特征决定了数学的一些主要特点和其他的特征。

二、数学的主要特点

对于数学的特点，数理哲学家早就有过概括，如（苏）亚历山大洛夫指出："甚至对数学只有很肤浅的知识就能容易地察觉到数学的特征，这些特征：第一是它的抽象性，第二是精确性，或者更好地说是逻辑的严格性以及它的结论的确定性，最后是它的应用的极端广泛。"[1]美籍科学家王浩在《从数学到哲学》一书中说："数学给人印象最深的特征有四：(1) 可靠性；(2) 抽象性和严格性；(3) 应用和广泛性；(4) 客观的、不带主观成分的、纯净的美"。总之，关于数学的特点虽各家说法有别，但主要的特点还是大致相同的，这就是 (1) 高度的抽象性；(2) 严谨的逻辑性；(3) 广泛的适用性。

第一，高度的抽象性。

(1) 数学与自然科学相比，具有较高抽象的程度。任何科学都具有抽象性，"数学以及其他科学都是把物体、现象、生活的一个方面抽象化"[2]。物理学只保留物理属性而舍弃其他。数学的抽象，则只保留量的关系而舍掉一切质的特点，只保留一定的形式、结构，而舍弃内容。这样，就得到了纯粹状态下以抽象形式出现的量与量的关系，较自然科学具有较高的抽象的形式。

---

〔1〕 亚历山大洛夫等：《数学，它的内容方法意义》第1卷，科学出版社，1959年版，第1页。

〔2〕 见《列宁全集》人民出版社，1963年版第38卷，第422页。

(2) 数学的抽象有一系列的发展阶段，使其逐步达到极度抽象的形式。有的学者认为“数学抽象分为三个阶段，第一阶段：产生数的概念（使对象同一起来，撇开个体物的质的无限多样性）和创造数的符号，即数字。第二阶段：从算术过渡到代数，在代数中已经不使用个别的具体数字，而使用字母符号；同时其结果对具体数字来说也是可靠的。具体的数字对字母符号而言是特殊的东西。第三阶段：不仅是撇开符号的一切数字内容，而且根本撇开数学运算本身的量的内容，数学抽象的这种发展是从特殊向一般的运动。”在这个意义上数学经历着从个别→特殊→一般的发展，日益更为抽象的过程。从运算角度来看，最初是数目的运算，后来发展为代数式的运算，再进一步抽象为代数系统的运算，如“向量”、“矩阵”等的运算。就具体的规律而言也有个逐步抽象而取一般化形式的问题。比如直角三角形三边之间的勾股定理，最初起源于勾股数组的关系 $3^2+4^2=5^2$，进而抽象为一般的直角三角形中 $a^2+b^2=c^2$，在 n 维空间中则表现为向量的纯积之间的关系，如果 f,g 正交，则 $(f+g,f+g)=(f,f)+(g,g)$ 这种更为一般化的形式。

(3) 数学的极度抽象还表现在它的研究方法上也是抽象的、思辩的。自然科学为了证明自己的论断总是求助于科学的实验，而数学为了证明定理只能用逻辑推理与计算，也就是纯数学几乎完全致力于用逻辑的方法处理抽象的概念和它们的相互关系。

(4) 数学的抽象还表现在它以自己特有的符号语言来表述自己的内容。一个字母可以代表完全不同的意义，比如 $A+B=C$，可以是普通加法，也可以是矩阵加法。数学的符号是经过千锤百炼的。运用符号有助于简化研究，便于发现规律。符号在数学史上已证明是一种重要的探索工具，比如：$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$ 符号记法使你能发现即使几十个数值例子都不大可能发现的东西：任意次多项式方程根与系数的关系。另外关于导函数与微分的例子，$y(t)$ 的导函数记为

$\frac{dy}{dt}$，本来这个记号中分子分母不可分，但复合函数微分法则证明之后，发现这个记法有巨大的优越性，$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$。正如 P. S. Laplace 所说，"这就是结构好的语言的好处，它的简化的记法常常是深奥理论的源泉"。所以，抽象的符号所形成的语言成为了构筑数学王国大厦的砖瓦。增加了数学的形式的美，更使数学披上了抽象的外衣。

(5) 数学是在纯粹状态下研究量与量的关系，它所研究的量与量的变化，是在理想条件下表现的纯粹的、独立的、真正的过程。比如研究蒸汽机，物理学中是试制、改进、提高功率，这种摸索的办法改进很慢。但萨迪·卡诺则是在最纯粹的状态下分析蒸汽机的基本过程——设计了一台理想热机。"这样一部机器就像几何学上的线或面一样是绝不可能制造出来的，但是它按照自己的方式起了像这些数学抽象所起的同样的作用：它表现纯粹的、独立的、真正的过程"。各种数系，自然数、有理数、实数、复数、超穷数都是纯粹的量。各种代数结构，群、环、体、范畴，几何结构、各种空间，各种关系如同构、同态、同调等也都是纯粹的量。各种属性连续性、确定性、随机性、不分明性、可构造性等也都是纯粹的量。可见，抽象就是要把对象理想化。正因为数学的高度抽象性，使数学概念、量的关系具有广容性的特点，这是数学所独有的。我们能够用同一个数学模型来研究不同对象的问题，也可以把形形色色的同类型问题，用相同或类似的数学方法来处理。所以，我们可以这样说：数学的抽象，正是数学的威力。

(6) 最后我们顺便指出：数学的抽象，所建立的概念和模型与客观情况只能是尽可能的比较一致，但数学与实际总还有一定的差别，是即有同一性又有差异性，要完全一样就寸步难行了。

第二，严谨的逻辑性。

数学要求逻辑上无懈可击，结论要十分确定。一般称之为数学理论的严密性或数学具有严谨的逻辑性。

(1) 从数学确认真理的方式上看，数学中使用逻辑的方法，至少基本情形是如此。这是由数学研究的对象，数学这一门科学的本质属性所决定的。数学研究的形式与方法具有客观的必然性，从古代用沙盘、筹码演算到用“一支笔、一张纸”从事数学研究，以至发展到现代应用电子计算机进行计算与证明，工具在不断改进发展，但使用逻辑的方法在原则上都是一样的。在科学研究中采用逻辑方法，不但数学采用，其他自然科学也采用。但像数学那样使用与要求，则只是数学所特有。数学的抽象性质预先规定了数学只能用从概念本身出发的推理来证明。数学这一门科学要求在数学概念的塑述上，原则上是逻辑地可以自足的。在数学定理的证明中，据以证明的前提，在逻辑上是清楚的，至少原则上如此；定理证明的步骤在逻辑上是完全的，是要严格无误的，一个数学概念，没有逻辑上自足的刻画，就不能进一步进行研究。正是数学概念的这种确定性以及逻辑本身的普遍意义使数学结论具有逻辑的必然性，也就是结论的确定性。

(2) 从科学发展的历史来考察，最早形成较为严谨的逻辑体系的学科是数学中的欧氏几何；在现代最早形成以公理化为标志的具有严密逻辑结构的学科，仍是出现在数学之中；并且卓有成效地推广应用以公理法为标志的严密逻辑结构的思想，也是以数学各个分支学科为最普遍。反过来，使逻辑学（指形式逻辑）的进一步精确化的工作，也就是使逻辑学更“合乎逻辑”的研究，又是借助于数学来完成的。由于数学用严格的逻辑建立体系，用逻辑方法来确认真理。环环相扣，无械可击，使数学成为具有严谨逻辑性的科学。

应当指出：数学的严谨性也是相对的，与数学发展的水平密切相关，随着数学的发展严谨的程度也在不断提高。同时，数学中严谨的逻辑方法一般是在数学理论形成以后的表述以及继续研究时的方法，而不是指一个理论如何形成时进行探索中所采用的方法。

(3) 科学的发展总是从描述客观世界的现象开始，进而解释这些现象，以达到认识并能动地改造客观世界的目的。也就是说，科学总是要更确切、更精密地揭露现象的实质。为此，就必须有严谨的数学理论为工具。反之，由于数学逻辑的严谨性，结论的确定性，使数学具有科学的预见性——即能达到“神机妙算”之效。

例 1. 1781 年，英国天文学家赫舍尔（1738—1822 年）发现了天王星以后，人们又发现它的计算位置和实际观测位置有偏差，而这种偏差又是无法用当时已知行星的吸引作用的影响来解释的。因此，科学家认为一定有尚未发现的行星存在。1845 年，法国天文学家勒维烈（1811—1877 年）根据哥白尼学说计算出了这颗未发现的行星轨道，英国科学家亚当斯（1819—1892 年）也独立地计算出了它的轨道。1846 年 9 月 18 日，勒维烈把他的计算结果写信告诉了柏林天文台助理员、天文学观察家约翰·加勒（1812—1910 年），加勒在 1846 年 9 月 23 日收到这封信的当天晚上，即发现了这颗新的行星，其位置距离勒维烈的计算位置相差不到 1°！这就是海王星。人们把海王星称之为“笔尖上”发现的行星！

例 2. “土星光环从望远镜里观察似乎是连续的物质。数学家用计算证明这是不可能的，并且光谱的分析证实了根据计算而得出的结论”[1]。

例 3. 由于长期天文观测，发现土星的轨道在扩大，木星的轨道在缩小。于是提出一个问题，长此下去，木星将会掉到太阳上去，而土星将会飞出太阳系，这个问题关系到太阳系的前途，普遍受到人们的关心。拉普拉斯根据数学原理，用微积分工具，特别是无穷级数，论证了这种现象源出于行星间的引力作用，轨道发生周期性扰动。以后土星和木星的轨道还会变回去，并计算出这个周期是 929 年。这个结论超出了人们直观范围，而天文观测

[1] 列宁：《唯物主义和经验批判主义》人民出版社，1960 年版，第 276 页。

又要到九百年后才能看到。这就要求数学必须具有逻辑的严谨性，结论的确定性，这样才能保证科学的预见性。这种以后将发生的事总还可以检验，而历史上已发生过的而记载是否真实的事就更不好检验了。但数学不但能准确地预报未来，而且还能精确地"回报"往事。比如《春秋》中记载了前722—前481年的37次日蚀，通过计算可以判知其中有32次是可靠的，其余皆属误传。

例4. 电磁波的发现。英国物理学家麦克斯威尔概括了由实验建立起来的电磁现象规律，把这些规律表述为方程式的形式。他用纯数学的方法从这些方程推导出可能存在着电磁波，并且这种电磁波应该以光速传播着。据此，他提出了光的电磁理论。这个理论以后被全面地证实并发展了。

数学不仅需要得到结果，而且还需要有清楚的定义与严格的证明，正是这种逻辑上的严谨性，使数学的结论的真理性完全不容争辩，从而使数学具有高度的预见性。

第三，广泛的适用性（或称应用的广泛性）。

数学的应用将会延伸无限广阔的领域，没有原则上不能应用数学的领域。

高度抽象的数学概念，反映着各种不同类型的具体对象中量的共同规律。这决定了数学可以广泛地应用到各种不同的对象中去。

（1）首先，我们经常地、几乎每时每刻都要在生产中、日常生活中、社会生活中运用着最普通的数学概念、方法与结论。其次，对于力学、物理学、天文学、化学等自然科学，数学已成为无可争辩的有效工具，并且数学的应用范围在日益扩大。在现代发展起来的综合性尖端技术上，如星际航行等离开数学计算是不可能的。"数学是一切科学得力的助手和工具"，"数学是科学的大门和钥匙"，"数学是科学的助产婆"，"当我们不能用数学的圆规或经验的火炬时……肯定的，我们连一步也不能向前迈进"。正如华罗庚所说："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球

之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学”。

（2）数学应用之所以特别广泛，原因在于：一种量的关系可以同时存在于具体的种种不同质的事物之中。因而数学模型可以有种种不同的解释，这就是它适应于联系种种不同的实际问题的根源。数学应用的广泛性是与数学抽象的广容性和数学结论的精确性相互制约着的。

数学研究量和量的变化、量的关系，属于物质世界的外部规定性。就人们认识事物的整个程序而言，是从它的外部联系进到内部联系。正因为这样，对于某一具体事物，认识它的量的关系对于认识它的质的特征是必不可少的。由于量与质是对立统一的，我们原则上可以无例外地通过对事物量的规定性来认识事物的质的规定性。华罗庚赞成这样的观点：“一切问题都是数学问题”。“高技术的本质是一种数学技术。”因此，一切科学研究在原则上都可以用数学来解决有关问题。只有现在还不能应用数学，没有原则上不能应用数学的研究领域。不仅如此，只有通过对于事物量的规定性来认识事物，才能精确地认识事物的规律。按照马克思的思想，一门科学只有当它达到了能够运用数学时，才算真正发展了。

（3）从历史发展来看，运动形式低级的学科最先应用数学，运动形式高级的学科应用起来要难一些、晚一些。19 世纪时，恩格斯曾概括“数学的应用：在固体力学中是绝对的，在气体力学中是近似的，在液体力学中已经比较困难了；在物理学中多半是尝试性的和相对的；在化学中是最简单的一次方程式；在生物学中＝0”，正是在上述意义下表述的。值得注意的是，马克思很早就注意把数学应用于社会科学。他在政治经济学中应用了许多数学知识，并且“为了分析危机，我不止一次地想计算出这些作为不规则曲线的升和降。并曾想用数学方式从中得出危机的主要规律（而且现在我还认为，如有足够的经过检验的材料，这是可能的）”（1873 年 5 月 31 日的信）。一百年来，数学的发展计算机的问世使

数学应用的领域越来越广。不但应用于自然科学技术而且也逐步应用于社会科学。比如有人把1948—1966年已报废的陈旧的物探资料进行重新推断，从而发现了富铁矿，应用了判别分析、趋势分析等各式各样的概率统计方法。甚至傅立叶的三角级数在人们意想不到的医学领域里起了作用。近年来发展了一门新兴的边缘科学——计量诊断学，可以对各种疾病作出极其正确的诊断。心电图、脑电波都是随时间变化的周期函数，其分析与处理都必须用到傅立叶变换。现在，红外、紫外、核磁共振与质谱中，应用快速傅立叶变换已是常规操作了。

（4）数学作为“科学的侍女”，具有科学研究工具的先备性，也就是数学理论必须而且应该走在其他学科的前面，事实也正是如此的。如黎曼在创立 n 维黎曼几何时，就预料到这种几何会与力学有关，这个猜想后来果真被后人证实了。又如数理逻辑曾长期找不到应用，现在却广泛地应用于自动化和无线电技术、计算机结构设计及其他许多技术领域中。人们在发展电子计算机时，事先已经准备好了必须使用的数理逻辑这一工具。希尔伯特曾指出：“更令人惊异的，乃是一种现象，我们与 Leibniz 所用的涵义不同而称之为‘前定的和谐’，这简直是数学思想的化身和体现。这方面的古老的例子是圆锥曲线，人们早在臆测到我们的行星或电子是按照这种轨道运行的很久之前已经研究过它了。但‘前定的和谐’方面的最超群而惊人的例子是著名的爱因斯坦相对论。这里只是由于不变性的一般要求与最大的简单性的原理相结合而数学上惟一地提出引力场位的微分方程，而这种提法如果没有很久以前就存在的 Riemann（黎曼）的深入而困难的数学研究就会成为不可能的。在最近大量积累了这样的情形，即恰恰是在数学的兴趣中心处最重要的数学理论，也同时就是物理学中最需要的。我曾经由纯粹数学兴趣发展了无穷多变量的理论，并在这里使用了谱分解这一名称，当时并未能预料到后来当真体现成物理学中的真正的谱”。通过数学史可以看到，数学理论由于它自身的对象和

逻辑特征，使得它有很多“储备”。这些储备往往跑到它被人们真正重视或深入实际以前几十年，甚至几百年。因此，对于眼下还未找到应用的数学理论，就不应忽视它们的意义，而应积极地去寻求它在生产或科学上的应用。同时，其他科学工作者，不管是硬科学和软科学，都要设法在自己的领域中进行定量的研究，应用数学方法，使理论具有科学的预见性。

(5) 从认识世界的方法论角度看，数学是“辩证的辅助工具和表现方式”。因为事物的量的关系，总是在一定的方式下和事物的质联系着，事物的质总是通过一定的量来表现，要认识事物的质，就不能不研究量，因此，“对情况和问题一定要注意到它们的数量方面，要有基本的数量的分析”。这正是其他一切科学不能离开数学这个工具和方法的原因。

数学里面运用着它所特有的表达方式——“符号表示法”。这种方法起源于数学，但随后就进入到自然科学的许多部门，它不仅为数学带来发展的契机，而且几乎在整个自然科学领域里，都显示出它的强大的生命力。近年来，把它运用于语言学，就使电子计算机进行翻译成为可能。这种方法的应用，也使其他科学日益取得了更加简约的形式。

辩证法的基本规律在事物运动变化发展过程中的具体表现、具体应用，都与数量关系分不开。要准确把握对立面转化的条件，精确地把握量变质变过程的关节点，正确地认识否定之否定过程中的发展环节，都要依赖于数量的分析。社会科学与哲学并不是不需要、不可能应用数学方法，而是因为它们的现象比较复杂、多有定性信息，较少定量的信息，而且随机因素多，条件又经常改变，因此，它们往往需要的数学工具更多，需要建立的数学模型更加复杂，碰到的是更大量的数据。现在已出现数学向哲学领域渗透，推动哲学研究进一步发展的苗头；出现了数学向经济领域渗透，促进了经济工作的精确化、定量化以及数学向语言学渗透，加速了语言研究的现代化、科学化。我们要应用唯物辩证法认识

世界、改造世界，力求能更准确地按客观规律办事，力求增强科学预见，减少盲目性，没有数学作为辩证的辅助工具是不能很好完成这个任务的。

(6) 数学不只是认识现实事物或对象，更重要的是一种认识的手段，它具有某种超时空和非因果性的形式特征。与所有以经验事物为对象的科学大不相同。后者总需要以观察、实验为基础，前者的无矛盾性便是它的保证。数学是人所有的特种认识工具和符号语言。如同人的物质工具一样。但它以最纯粹的形式体现了人的认识的主观能动性。这种能动性，从哲学上看，又仍然是人类的实践能动性的高度抽象化的反映。因之，数学的普遍必然，从根源上讲，是抽象化了的实践活动（劳动操作）形式本身的普遍必然。人们在实践基础上，不断创造出自由地理想化地反映关系、结构的概念和系统（它们远离现实原型，像纯粹是从思维中推衍出来的一样）成为一种认识世界、改造世界无比锐利的工具，正如人不断创造出现实中没有原型的物质工具一样。

数学的各种特点，是由数学的对象所决定，是相互联系的。

数学研究量与量的变化，决定了数学的概念、结论、方法都是抽象的，而不是依赖实验获得的东西。正因为数学最终不能仅依赖于实验与直观来确认真理，所以在它的逻辑结构上，必然要求是严格的，否则便不能保证它的逻辑必然性。这就是逻辑严密性存在的价值。反过来，这种逻辑严密性，又保证着数学概念的确定性。

数学极度抽象形成高度概括的广容性是数学概念(或系统)的外延（或对象系统）特别广阔的表现，也就是它所能联系的实际对象特别丰富。加上数学结论的获得确认，只依赖于严密推理，就使得它冲破了既得材料和成果的狭隘界限，使得它能有很多的“储备”，就好像为数学以后的应用作了广泛的准备一样。所以，数学应用的广泛性，是数学高度抽象性和逻辑严密性的必然结果。同时反过来前者对后者也有着积极的促进作用。即：数学应用的越

加广泛就要求数学的抽象程度、严密程度就越高级。从认识过程看，数学应用使数学返回实践，一可检验数学模型的是否正确，二是吸取新的养份进一步发展理论，开拓新的领域。并且通过应用促进数学与其他自然科学的联系，互相渗透、互相推动，从而促生新的概念，新的方法，新的理论。同时也能促使原有概念更加精确，原有逻辑结构更加严密。这是数学内部逻辑必然性的表现，是数学发展的内在的力量。

三、数学在科学分类中的地位及其他

1. 数学在科学分类中具有特殊的地位。物质世界的运动，按其矛盾的特殊性，可分为自然、社会和思维三大基本领域。与这三大领域相对应，现代科学有研究自然界运动规律的自然科学，研究社会运动规律的社会科学和研究思维运动规律的思维科学三大部类。由于数学是研究一切量与量变的科学，量的关系不是自然界所特有的，物质世界三大领域都有着量的规定性，因此说数学是自然科学，数学是自然科学与哲学之间的过渡学科，或数学可以归结为逻辑都不可能准确反映数学在科学分类中的特殊地位。数学是自然科学、社会科学及思维科学的“辩证的辅助工具和表现方式”。恩格斯曾把“数学与自然科学”并提是正确的、有远见的。由于19世纪以来数学与科学的发展，人们逐渐认识到：数学不是自然科学，当然更不是社会科学、思维科学或哲学。数学从自然科学中独立出来了。“数学在今天成为了与自然科学、社会科学、思维科学具有同等地位的一个单独的大部类科学！”[1]

但鉴于科学界和社会上的习惯，有时也还把数学说成是自然科学的基础学科。大家应清楚这一点，做到原则上清楚。

2. 数学本身是没有阶级性的。在这点应该有明确、清醒的认识。事实告诉我们，勾股定理产生于奴隶社会，至今一直是各个

〔1〕 丁石孙：《谈谈数学的研究对象问题》载《人·自然·社会》，北京大学出版社，1988年版。第10页。

阶级都使用的工具，并且在与地外文明交往中它也可能是交流思想的信息，是没有阶级性的。在历史上曾有过这样的教训，苏联革命初期，有一些无产阶级文化派分子，空谈什么要抛弃资产阶级的自然科学，建立无产阶级的自然科学。无产阶级文化派的一位主要的理论家波格丹诺夫说:“如果说，曾经有过封建的几何学，后来又有过资产阶级的几何学，那末现在需要有、也会有无产阶级的几何学，这并不是奇谈”。无产阶级文化派的另一位主要的理论家普列特涅夫说：那种认为“不可能有阶级的数学、阶级的天文学”，“不论从无产阶级还是从资产阶级观点来看二乘二总是等于四”的论点，是“资产阶级阵营中敌人的”论点，他号召无产阶级去“进攻资产阶级的科学”，提出要把“科学本身”“科学的内容”“社会主义化”，宣称：“没有科学，社会主义是不可能的。有资产阶级科学，社会主义同样是不可能的”(真理报 1922 年 9 月 27 日)。列宁曾尖锐地批判过无产阶级文化派。对普列特涅夫那篇发表在《真理报》上的文章《在意识形态战线上》作了许多批注。斥之为“紊乱不清!”“十足的杜撰”“一派胡言”。并为此给当时主持《真理报》工作的布哈林写了一张便条，质问他“为什么要把普列特涅夫用各种炫耀博学的时毛字眼来虚张声势的小品文这类昏话登载出来”，并且指出：“作者应该学习的不是‘无产阶级’科学，他应该进行普通的学习”。“要知道，这是伪造历史唯物主义，玩弄历史唯物主义”![1] 那种所谓“数学是有阶级性”的极左理论所带来的危害在我国史无前例的“文革”动乱中也是有目共睹的，这从理论与现实结合上证明了数学本身是没有阶级性的!

概括本节内容，总之，以量和量变为研究对象的科学——数学，是内容具体，形式抽象，理论严谨，应用广泛，方法精巧，地位特殊的一门基础科学。

---

〔1〕《列宁选集》35 卷，人民出版社，1963 年版，第 557 页。

思考题

1. 试说明数学研究的对象及其在科学分类中的特殊地位。
2. 说明数学的主要特点及其相互联系。

第二节 数学模型方法

用数学方法解决实际问题，先要将实际问题抽象成数学模型，作为数学结构来分析研究。

一、什么是数学模型

我们从两个例题说起。

例 1. **"洗衣服的数学"**。设衣服经洗涤充分拧干后残存水量为 w 千克，其中含污物 m_0 千克，漂洗用的清水 A 千克，我们把 A 千克水分成 n 次使用，每次用量依次是 a_1，a_2，…，a_n（千克）。经过 n 次漂洗后，衣服上还有多少污物呢？怎样合理使用这 A 千克水，才能把衣服洗得最干净？（残留污物量最少？）

第一次，把带有 m_0 千克污物的 w 千克水的衣服放到 a_1 千克水中，充分搓洗，使 m_0 千克污物溶解或均匀悬浮于 $w+a_1$ 千克水中，把污水倒掉，衣服拧"干"后，由于 m_0 千克污物均匀分布于 $w+a_1$ 千克水中，所以衣服上残留的污物量 m_1 与残留的水量 w 成正比。

$$\frac{\text{衣服上残余污物量 } m_1}{\text{原来残存的污物量 } m_0}=\frac{\text{拧“干”后残存水量 } w}{a_1+w}$$

即

$$m_1=m_0\cdot\frac{w}{a_1+w}=\frac{m_0}{1+\frac{a_1}{w}}$$

完全类似的分析可知，漂洗两次之后衣服上的残余污物量为

$$m_2=\frac{m_1}{1+\frac{a_2}{w}}=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)}$$

依次继续漂洗，当第 n 次漂洗完后，设衣服上残余的污物量为 m_n，则有

$$m_n=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)} \qquad (*)$$

从公式（*）可以看出：

(1) 原来衣服上残存污物 m_0 越多，最后残存的污物 m_n 也会越多（衣服越脏越难洗净，与实际感受一致，因此衣服要勤洗为好！）

(2) w 越小，m_n 就越小，即每次拧得越“干”，最后残余物会越小，这与我们生活常识是一致的。

公式（*）是“理想情况下的洗衣效果”公式。因为我们假定了每次洗涤中，污物都能充分均匀地溶于水中，实际上这是不容易做到的。公式（*）就是洗涤衣服的“数学模型”，我们只要对公式（*）进行相应的数学分析处理，就会得出有关的结论。

比如可以回答下面的问题：

(1) 是不是把水分得越匀，洗得就越干净？

(2) 是不是洗的次数 n 越多越干净？

先看 (1)，其数学提法是，对于固定的 n，如何选取 a_1，a_2，…，a_n，才能使 m_n 为最小？这里的条件是 $a_1+a_2+\cdots+a_n=A$。

从公式（*）可见，要 m_n 最小，则须乘积

$\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)$ 最大，注意到

$$\left(1+\frac{a_1}{w}\right)+\left(1+\frac{a_2}{w}\right)+\cdots+\left(1+\frac{a_n}{w}\right)=n+\frac{A}{w}$$

当 n 固定时，$n+\frac{A}{w}$ 为定值，问题转化为

当 n 个正数 $1+\frac{a_1}{w}$，$1+\frac{a_2}{w}$，…，$1+\frac{a_n}{w}$ 之和为定值 $S=n+\frac{A}{w}$ 时，问这 n 个数的乘积何时最大？

根据算术—几何平均不等式，可知

$$\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)$$
$$\leqslant\left[\frac{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)+\left(1+\frac{a_2}{w}\right)+\cdots+\left(1+\frac{a_n}{w}\right)}{n}\right]^n=\left(\frac{S}{n}\right)^n$$

但当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{A}{n}$ 时

$$\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)=\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n=\left(\frac{S}{n}\right)^n$$

这表明，每次用水量相等时，可以使乘积

$$\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)$$

取得最大值，从而根据(*)，残余物 m_n 取最小值。

(2)的数学提法是，当 n 增大时，m_n 的最小值增大还是变小，或是按什么规律变化？

若把洗 n 次后残余最少的污物量记为 m_n^*，则

$$m_n^*=\frac{m_0}{\left(\frac{S}{n}\right)^n}=\frac{m_0}{\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n}$$

同理

$$m_{n+1}^*=\frac{m_0}{\left[1+\frac{A}{(n+1)w}\right]^{n+1}}$$

由算术—几何平均不等式，可得

$$\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n\cdot 1<\left[\frac{n\left(1+\frac{A}{nw}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left[1+\frac{A}{(n+1)w}\right]^{n+1}$$

故 $m_n^*>m_{n+1}^*$，这说明，把水分成 $n+1$ 次用要比分成 n 次洗会更好一些。

那么，当水量 A 一定时，是不是只要洗的次数 n 足够多，就可以使 m_n^* 任意小呢？用数学语言表述：A 为定值，当 $n\to+\infty$ 时，$m_n^*\to 0$ 吗？

由于 $n\to+\infty$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，只要令 $\frac{A}{nw}=\frac{1}{k}$ 　　则

$n=k\cdot\frac{A}{w}$,当 $n\to+\infty$时,有 $k\to+\infty$,则

$$m^*=\lim_{n\to+\infty}m_n^*=\lim_{n\to+\infty}\frac{m_0}{\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n}$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{m_0}{\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{\frac{A}{w}}}=\frac{m_0}{e^{\frac{A}{w}}}\qquad(**)$$

这表明,m_n^* 不是无穷小量,即当总水量 A 一定时,无论分多少次漂洗都做不到一点污物都不残留。但从(* *)可以看到:若总水量充分大,且洗的次数充分多,可以使 m_n^* 任意小,但这与节约用水相矛盾。实际上也不必要!事实上,总水量 A 与残余水量 w 的比设为 4∶1,即$\frac{A}{w}=4$ 时,残余物的最小值

$$m^*=\frac{m_0}{e^{\frac{A}{w}}}\doteq\frac{m_0}{(2.718)^4}\doteq\frac{m_0}{54.6}\doteq0.018m$$

一般也就够用了。

例 2. 20 世纪 20 年代,意大利生物学家棣安考纳 (U. D'Ancona) 在研究鱼类的相互制约的情况时,意外地发现,在第一次世界大战期间,地中海各港口所捕获的鱼中,诸如鲨鱼、鳐鱼等掠鱼类所占的百分比显著增多。这些鱼都是以人类的食用鱼为食饵的,这使他感到吃惊。下表 (2-2-1) 是 1914—1923 年,地中海某港口收购的鱼中,掠鱼类所占的百分比。

表 (2-2-1)

年份	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
%	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4	27.3	16.3	15.9	14.8	10.7

1915—1919 年,造成了捕渔业萧条,使捕鱼量锐减,这是由于战争的客观原因。但是这种捕鱼量的减少,反倒对掠鱼类更有利!令人费解!棣安考纳尽管从生物学角度作了周密思考,却始终未能寻得解释。于是就去求助于他的同事著名的意大利数学家伏尔特拉 (V. Velterra)。伏尔特拉从数学角度考虑,将鱼分成两

大类：一类是食用鱼（被食者，食饵），其总数记为 $x(t)$；另一类是掠鱼类(捕食者)，其总数记为 $y(t)$。其中 $x(t)$，$y(t)$都随时间 t 而变化。设两者的变化率分别为 $\dot{x}(t)$和 $\dot{y}(t)$，从数学上说，它们分别是 $x(t)$，$y(t)$对时间变量 t 的导数，伏尔特拉引入一些假定：

(1)食用鱼的食物很丰富，如果不被掠鱼类捕杀，它们会呈指数性增长，即

$\dot{x}(t)=ax(t)$，其中 a 是一个正常数。

(2)由于有掠鱼类存在，它们与食用鱼相遇的机会与乘积$x(t)\cdot y(t)$成正比，所以实际有

$\dot{x}(t)=ax(t)-bx(t)\cdot y(t)$，其中 b 也是一个正常数。

(3)掠鱼类的自然减少率与 $y(t)$成正比，而增长率与乘积$x(t)\cdot y(t)$成正比，即有

$\dot{y}(t)=-cy(t)+\mathrm{d}x(t)\cdot y(t)$，其中 c 和 d 也都是正常数。

(4)再设捕渔业对两者分别造成的减少率为 $\varepsilon x(t)$和 $\varepsilon y(t)$，其中 ε 表示捕渔业的水平。

这样伏尔特拉就于 1926 年得到了如下的**鱼的生态数学模型**：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t)[a-by(t)-\varepsilon]\\ \dot{y}(t)=y(t)[-c+\mathrm{d}x(t)-\varepsilon]\end{cases}$$

这是一个常微分方程组。

在 $x(0)>0$，$y(0)>0$ 的条件下求解这个方程组，它的解都是 xOy 平面上的封闭曲线。这说明 $x(t)$和 $y(t)$都是时间 t 的周期函数，而这些周期解 $x(t)$和 $y(t)$的平均值是 $\bar{x}=\frac{c+w}{\mathrm{d}}$，$\bar{y}=\frac{a-\varepsilon}{b}$。这就告诉我们，食用鱼、掠鱼类都呈周期性消长；而当捕渔业兴旺，即 ε 较大时，$\bar{x}$ 反而增大，因而有利于食用鱼；相反，如果捕渔业萧条，即 ε 较小时，则会导致 $\bar{y}$ 增大，因而有利于掠鱼类。这样便从数学上回答了棣安考纳的问题，从根本上揭示了鱼类的消长规律。

通过上述二例，我们看到数学工作者并不是就实际问题原样不变地直接研究，而是把实际问题简化（舍去非本质因素）、纯化

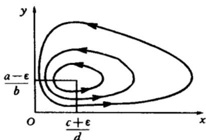


图 (2-2-1)

（舍去具体质的属性）提炼成理想状态的现实模拟物再进行研究，用科学的语言可以这样表述：**对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构，叫做数学模型，也可简称模型**。人们建立数学模型的过程称为建模，建模也就是由实际问题提炼出数学模型的活动过程。

二、建立数学模型的步骤、条件及分类

从上述二例可以看出，用数学方法研究实际问题，常常分以下步骤：

1. 选择有实际意义的问题；
2. 建立数学模型，把实际问题化成数学问题；
3. 找寻适当的数学工具来解决问题；
4. 把数学上的答案拿到实际中去应用、检验。

在数学教育的理论中，把上述过程概括为三大步：

第一步：称为**经验材料的数学组织化**。这里指的是对实际材料的数学描述，直到建立数学模型。

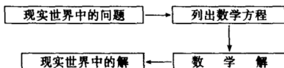
第二步：称为**数学材料的逻辑组织化**。这体现利用数学理论研究问题的过程。

第三步：称为**数学的应用**。利用理论结果指导实际，进行检验，进一步提出新的问题，又要建立新的模型。

要将数学的方法论功能转化为科学研究的实际力量，一个重要的途径是将实际问题提炼成数学模型。

1978 年美国数学专家，美国数学学会主席 D·L·伯恩斯坦曾指出：

“数学在应用中的作用，如下图所示



当然，人们也可以从现实世界中的问题出发，直接通过实验或观察，从而获得现实世界的解；但是这样做往往是行不通的，或者由于花费昂贵，只好作罢，所以制胜的办法就是通过数学模型，走一条迂回的道路”。

数学模型大量表现为数学公式，尤其是微分方程式的形式。无论是代数公式，微分方程，还是结构图形，它们作为客观事物的数学模型，必须至少满足以下三个条件：

1. 它必须能够说明大量的事实，而不仅仅只能说明两三个特定的事实；

2. 利用这个数学模型所预测的事情必须普遍成立，谁也否定不了；

3. 数学模型本身必须是最简便易行的形式。

由上述分析可以看到：从方法论角度看，数学模型是联系认识主体与实体的环节，是一种数学思想方法。从数学角度看，建模是一种数学活动，这种思想方法和活动是数学家和数学工作者们的一种重要素养。

从数学的整体来看，数学模型目前可分四大类：

第一类，**必然现象的数学模型**。其实经典数学为刻画客观世界中确定性事物的必然现象提供了极为方便可靠的数学模型。从客观事物中提炼必然现象的数学模型，一般表现为建立各种方程式：代数方程、函数方程、微分方程、积分方程、差分方程等。

第二类，**随机现象的数学模型**。在自然与社会现象中，有些事件的发生带有偶然性或随机性，而在纷乱复杂的大量偶然现象背后，隐藏着必然的规律。于是随着这种探索和研究活动的不断深入，一门包括概率论、随机过程论和数理统计在内的庞大的数

学新领域诞生了，它就是随机数学，这样，刻画或然现象便有了适当的数学模型。

第三类，**模糊现象的数学模型**。客观世界有许多模糊现象，比如张三是高个儿，长得很年轻，“高个儿”，“年轻”都是模糊概念，传给人们的是模糊信息，如何对这种信息进行处理？1965年，美国加利福尼亚大学自控专家L·A·查德第一次提出了“模糊集合”的概念，从而为模糊数学的诞生奠定了基础。

第四类，**突变现象的数学模型**。长期以来数学模型解决的是连续变化、平滑变化的现象，但现实世界现象中有突变现象，如水温不断升高，水的密度便缓慢地变小，当水温达到100℃时，水的密度突然小到了蒸汽出现的程度；地应力不断增加，当它达到了一定的程度时，就会突然地动山摇，地震爆发。这种量变到一定程度导致质的突变，引起科学家的注意，1968年法国数学家伦尼·托姆在这方面做了开创性的工作，发表了他的第一篇有关论文。1972年，他出版了《结构稳定性和形态发生学》一书，系统地阐述了突变理论，创立了研究突变现象的数学模型。

随着科学的发展，人们认识世界的深入，研究自然现象的数学模型也会发展、深入。新的数学模型也会不断的被发现，如处理系统信息不全的灰色系统理论，处理广泛存在的无规则而具有自相似系统的分形理论等等都是正在发展中的新的数学模型。

应当指出，关于自然界统一性的观点是建立数学模型的理论基础。建立和使用数学模型的方法，既有高度的技术性，又体现着统一性的理论思想，它预示着现代数学方法日益呈现理论化的趋势。

思考题

1. 举例说明什么是数学模型？用数学模型去解决实际问题的步骤是什么？

2. 在数学中大体有几类数学模型？它们都以什么样的现象为

研究对象？

第三节 数学公理方法

公理方法起源于古希腊，是与用形式逻辑方法系统地整理几何知识的工作相联系的。公元前3世纪欧几里得整理的《几何原本》是这一工作的杰出代表。此后，经过两千多年的发展，到了今天，公理化方法不但是数学研究中的重要方法，而且被逐步应用于理论力学等其他自然科学中，日益显示出巨大的威力。数学公理方法为什么有这样大的威力呢？我们有必要从数学公理的产生，发展及其作用等方面对数学公理方法的客观性作一些研究和探讨。

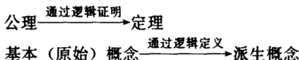
一、数学公理的产生

数学公理以公元前3世纪形成的几何学公理为最早。但是，作为人们对现实世界空间形式所结晶的几何知识则起源得更早。比如，埃及古代的草纸文献中（前1650年左右），就记载有大量的几何经验公式。如圆面积 $s=8/9\,(\text{直径})^2$ 等。（相传是把谷粒放满圆面和以直径为边长的圆外切正方形，然后数谷粒而得此经验公式）。这表明，几何学——作为从土地测量中产生的知识是人们从实践经验中归纳出来的。到古希腊时期，几何学经验知识积累的相当丰富了，于是，如何使这些经验知识更加条理性，综合性，上升为理性认识的问题很自然就提到了日程。因此，需要对经验知识进行系统的加工整理。这是人们认识发展的必然要求，也是数学发展的必然要求。

那么，在这个时期有没有可能完成这项工作呢？我们看到，完成这一工作的一个重要条件已经具备。这就是由实践中已经逐渐形成并确立了形式逻辑的方法。在亚里士多德（前384—前322年）的著作中已经产生了关于公理方法的论述，对数学与逻辑学

的方法进行了初步的分析与研究。

按照亚里士多德的观点，演绎证明的科学体系的全部命题分为基本命题（公理）与由基本命题引申出来的命题（定理）。在命题中使用的全部概念也分为两类：一类是原始概念（基本概念），再一类是从基本概念派生出来，运用逻辑方法由基本概念直接或间接加以规定的概念——派生概念。总之，亚里士多德的逻辑证明论的逻辑结构可以简要概括为：



根据这个逻辑结构亚里士多德提出了两个逻辑要求：1. 公理必须是明显的，因而是无需加以证明的；同样，基本（原始）概念必须是直接可以理解的。2. 由公理证明定理时，必须遵守逻辑规律和逻辑规则，同样地，通过基本概念直接或间接地对派生概念下定义时，也必须遵守下定义的逻辑规则。

欧几里得（约前 330—前 275 年）把亚里士多德初步总结出来的公理方法应用到几何学中，把古代关于几何的经验知识条理化，系统化为一个合乎逻辑的体系。这时，以公理方法为特点的《几何原本》这一杰出著作就产生了。自此以后，初等几何很少变化，《原本》在很长时期内一直是传播几何知识的重要书籍。

为什么用形式逻辑方法来建立数学体系时，公理方法是不可避免的呢？这是因为数学与其他自然科学在研究方法上有着很大的差异。如果说，天文，物理，化学，生物等学科都可以用观察实验来确认真理，那么，由于数学研究的对象是量的关系，所以只能主要地依赖于逻辑的方法来确认真理。

用形式逻辑的方法来建立数学体系，有两个必然要遇到的问题。

第一，按形式逻辑的方法：

被定义的概念＝最邻近的属概念＋种差

例 1. 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形。

平行四边形 ＝ 四　边　形 ＋两组对边分别平行。
（被定义概念）（邻近属概念）　（种　　差）

例 2. 有一个角是直角的平行四边形叫做矩形。

矩　　形 ＝ 平行四边形 ＋有一个角是直角。
（被定义概念）（邻近属概念）　（种　　差）

照这样追根穷源，前面总要有一些基本概念是不能用形式逻辑方法下定义的。这种不能用形式逻辑方法下定义的概念就是基本概念或原始概念。如欧氏几何中的点，直线，平面的概念，集合中的元素概念等都是原始概念。

第二，后面出现的定理，总要用前面已经证明过的定理去证明。如果违反了这一点，就会出现由 A 证明 B，又反过来由 B 证明 A 的循环论证。就要犯逻辑循环的错误。所以追根穷源，总要有些基本真理是在数学上没法证明的。这类基本命题，就是数学上通常所说的公理。比如等量公理，不等量公理，平面几何中的“过两点只能引一条直线”,“过直线外一点只能引一条直线与已知直线平行”等都是常见的公理。

通过以上简略的考察，我们看到：数学公理方法一开始就是在数学与逻辑学实践认识成果的基础上产生，并由于整理几何学的经验材料而形成起来的。公理方法的形成是作为解决数学对象的特殊矛盾的一个特殊方法。“数学上的所谓公理，是数学需要用作自己出发点的少数思想上的规定”。（恩格斯语）其一，“数学上需要用作自己的出发点”，是指数学逻辑推理的大前提；其二，“思想上的规定”就是逻辑上判断或命题，即公理是用判断或命题的形式来表现的；其三，公理的个数不能太多，而是“少数思想上的规定”。因此，概括起来说，公理方法就是从少数不加定义的原始概念和少数不加证明的基本命题（公理）出发，应用逻辑推理规律去证明一系列的定理。

二、数学公理的发展

欧几里得第一个用公理方法建立几何学的逻辑结构，所著《几何原本》开始了数学公理发展的第一阶段。

第一阶段　朴素的公理方法（前3世纪—18世纪末）。《原本》的基础是由作为原始概念的定义以及公理与公设所组成。它的原始概念只是描述性的定义，它的公理与公设是一些不加数学证明而直接采用的命题。以此为基础用形式逻辑演绎的方法来展开自己的体系。

点、直线、平面是《原本》中的原始概念，它们的定义只能是描述性的，是不充分的。如“直线是同其中各点看齐的线”就是一例。

《原本》中共列举五条公理。

1. 与同一件东西相等的一些东西，它们彼此相等。
2. 等量加等量，总量仍相等。
3. 等量减等量，余量仍相等。
4. 彼此重合的东西是相等的。
5. 整体大于部分。

《原本》还列举有五条公设：

1. 从任一点到另一点作直线是可能的。
2. 把有限直线不断循直线延长是可能的。
3. 以任一点为中心和任一距离为半径作一圆是可能的。
4. 所有直角彼此相等。
5. 若一直线与两直线相交，且同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必相交于一点。(这就是所谓的第五公设，它与“过直线外一点只能引一条直线与已知直线平行”是等价的)。

从现代数学观点看，《原本》中的公理方法还存在很多缺欠，不甚严密，还没有完全摆脱几何的直观。比如它没有定义直线上

一点在其余两点之间的“介于”概念，也没定义直线的“同侧”，“异侧”的概念，这些都要凭借直观。另外，《原本》中使用了运动与连续的思想，但没引入运动与连续的概念。甚至两段弧有无交点也是可以质疑的。因此，这个时期的公理方法只是一种朴素的公理方法。

朴素公理法的代表著作《几何原本》中，对基本元素采用直接定义法，这些原始概念的定义只能是描述性的，因而是不充分的。它所研究的点、直线、平面还没有摆脱直观意义的局限，只是一种解释。它所研究的空间只是一种个别的空间——欧氏空间。《原本》中的公理方法只是作为整理几何经验材料成为科学的体系而起作用的。

这个阶段延续近两千多年，这个时期人们被一个基本问题所纠缠。即第五公设并不像公理所要求那样“是显然的”，两直线无限延长是否相交，超出了人们感性经验的范围。人们发现《原本》似乎对第五公设也有保留，虽提出了第五公设，但直到第27个定理的证明才迟迟地应用这个公设，于是引起数学家的疑问：第五公设会不会是多余的公设？会不会是一个定理？不少数学家曾试图用几何中已采用的其他公理去证明第五公设。但近两千年的努力没能成功。有些数学家宣布自己证明了第五公设，但不久就被发现，其中犯有偷用第五公设等价命题的逻辑错误。直到19世纪20年代，人们用与第五公设相反的命题作假设条件代替第五公设，经过逻辑推导并不产生矛盾，从而创立了非欧几何。非欧几何的问世，动摇了那种把欧几里得空间看作是惟一可能的空间学说的观点。由于空间观念从个别（欧氏空间）上升到特殊（各种几何空间），公理方法也就从朴素公理方法上升为概括的公理方法。

第二阶段　概括的公理方法（19世纪）。这个时期的主要标志是非欧几何的确立。这样一来，拓宽了人们的空间观念，解放了人们的思想。1982年《科学美国人》杂志上 Tiet Hjen 写了一首诗

来描写这一思想上的变化：

两条直线若平行，相交一定在无穷。
欧氏老翁生一世，反复强调五公理。
死后升天到无限，怪事纷纷都出现。
有的相交在可数，有的无穷也分散。
高斯黎曼羞老欧，看你如何再坚持。

总之，坚持第五公设是不对的，几何学可以要也可以不要第五公设，这就是高斯黎曼的工作。公理方法开始应用于其他数学学科。这个时期本质上科学与哲学还认为欧氏《原本》是没有缺点的理论公理构造，大家只是仿效《原本》的公理方法在其他数学学科建立公理体系。大量学者仍然认为公理系统中的基本概念只有一种起源，一种解释。只是由于数学分析的奠基工作，使一些基本概念更加明确。如无限，运动的概念已经引入数学中，在实际上已克服了《原本》中公理方法的某些缺欠。

第三阶段　形式化的公理方法(1898 年以后)。近代公理方法的产生是 19 世纪以来数学发展的必然结果。19 世纪前半期，由于代数方程求一般解的问题导致群论的建立。把代数方程是否一般可解的问题归结为群的结构的研究，此后，又出现了域，环，子环，理想子环，线性空间等概念，并且产生了命题演算的代数系统。代数学起了深刻的变化，由过去研究方程解的学科变为研究各种代数系统结构的科学了。

此外，非欧几何的建立，扩大了空间的概念，也引起人们对公理方法的兴趣。欧几里得公理体系由于只反映初等空间的性质，它的不充分性，在射影几何，n 维空间几何出现后，就日益清楚了。由于对数学各学科的深入研究，人们发现公理的解释模型不止一种，对公理的不同解释，推导出的理论都是正确的。同时，19 世纪下半叶，更出现了一个学科的方法应用到另外学科之中。这就迫使数学家来分析不同数学学科的共同基础及相似之处。从而引起了对数学公理方法最一般问题的研究。形式化公理方法作为近

代数学方法就是在这种形势下产生的。

1898年希尔伯特在《几何基础》中系统地提出了形式化公理方法。建立了一个完善的几何学公理体系。他把点，直线，平面作为几何学的基本对象，只承认其存在而不加定义。另外规定了五组公理：

第一组　结合公理　8条

第二组　顺序公理　4条

第三组　合同公理　5条

第四组　连续公理　2条

第五组　平行公理　1条

这种公理方法在建立近代数学的逻辑基础方面有着重大的影响，它影响所及于集合论，代数，拓扑学，度量几何，概率论等数学分支，并且还应用于质点静力学等自然科学分支中。

20世纪前三十年，希尔伯特的元数学即证明论使公理方法得到进一步精确化。它把数学的定理排列成演绎体系，把数学中使用的逻辑推理规则也排列成演绎体系。并且用数学符号(如＝,＋，0，a，b，c等等）和逻辑符号（如¬，∨，∧，→，≡等等），将数学命题变成公式，于是，全部数学公式就变成公式的集合。从而，公理化的数学理论就变成了演绎的形式系统。

以表(2-3-1)来比较形式化公理方法与朴素公理方法的区别：

表（2-3-1）

《几何原本》中朴素的公理方法（欧几里得）	《几何基础》中近代公理化方法（希尔伯特）
1. 基本元素采用直接定义法，如点，直线，平面的定义是描述性的，不充分的。	1. 只承认基本对象是存在的，不加以定义。而是通过一系列的公理来表明基本对象的性质。也就是用公理来规定基本对象之间的关系，把这种关系作为一种隐定义。这是近代公理方法的真正特色。

（续表）

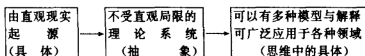
《几何原本》中朴素的公理方法（欧几里得）	《几何基础》中近代公理化方法（希尔伯特）
2. 点，直线，平面只限于平常的直观意义。只有一种解释，还摆脱不了直观意义的局限。	2. 点，直线，平面允许有不同的解释与模型。不管什么元素，只要满足公理系统就都可以称作点，直线，平面。
3. 它是由对象来决定公理。这种几何学是研究物体的空间关系和形状的科学。	3. 它是由公理来定义对象。因此这些公理不仅仅定义了一种几何，而且也定义了一种结构。这种几何学是作为研究物体的空间形式和关系所表现的那种量的关系的科学。

总结数学公理发展的三个阶段，这是一个由个别（欧氏空间）上升到特殊（各种几何空间），再上升到一般（一般意义下的空间）的过程。最后形成了数学中普遍适用的公理化这种科学的方法。由朴素公理方法（个别）→概括的公理方法（特殊）→形式化公理方法（一般），这无疑是一个辩证的发展过程。是一个由低级到高级，由朴素到精确，从依赖直观到完全抽象的发展过程。由最初用公理作为整理经验材料的方法发展为用公理方法作为探求新结果的一种手段。由在几何上单科应用发展为在数学中普遍应用，并逐步推广应用于自然科学技术中去。这就是数学公理方法辩证发展的主要内容。

个　　别→特　　殊→一　　般

欧氏空间→各种几何空间→一般意义的空间

朴素的公理方法→概括的公理方法→形式化的公理方法



三、数学公理的客观基础

数学公理作为数学体系的出发点，其余命题都要从公理出发

按逻辑规律演绎证明。然而数学公理却是数学本身无法证明的。在数学中公理是不加证明而直接采用的命题。那么，能不能由此而认为数学公理是“先验的”“凭空构造出来”的脱离实际的体系，或者说是任意杜撰的呢？这涉及到对公理方法客观性的认识。

第一，从公理的形成看，数学的认识过程大体可分为归纳的综合，公理化，演绎理论，实验检验这四个阶段。“演绎理论不过是数学的中心部分，在它的前面是归纳的综合”，“然后是公理化的阶段，这里由归纳综合的结果提取出定义与公理的总和，这些用来作演绎理论的出发点。最后，这演绎理论后面还跟随着一串实验的验证。”(法国数学家 M. Frechet 论文集《数学与具体》) 在人类认识空间形式，数量关系的过程中，社会实践是认识的基础，公理则是在一个阶段上人们认识的成果。而这个成果——公理，又成为数学体系的逻辑出发点。此后，用演绎推理展开数学学科的内容。从公理形成的过程不难看到公理方法与客观现实之间的联系。

第二，从公理方法作为整理经验材料的方法来看，数学公理法作为整理某一数学学科的逻辑方法，常常是在这一学科已有一定发展，并且积累了相当丰富的经验材料之后才有可能。这表明，“对数量的分析会得出这一切公理式的规定，即数量的必然规定”。在古代，人们整理几何材料，提出了包括第五公设在内的公理系统，尽管当时也觉得第五公设并不显然，但就当时人们所积累的经验材料的分析，承认第五公设又是必然的。再如，自从 17 世纪以来，人们积累了相当丰富的概率知识，而概率公理的建立则是 20 世纪前 30 年的事情。概率公理的建立是对已经积累的概率知识进行分析所得的必然规定。这些规定是：

公理 1. 对每个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$。

公理 2. 对必然事件 U，有 $P(U)=1$。

公理 3. 如果事件 A 是互斥事件 B 与 C 的和，即 $A=B+C$ 而 $BC=V$，其中 V 是不可能事件。则

$$P(A)=P(B)+P(C)。$$

可见，某一学科已经积累的材料是这一学科公理化的基础。

第三，从公理方法作为探索新结果的手段来看，现代数学与自然科学中公理方法还作为探索新结果的一种手段被广泛采用，从一些假设的公理出发，进行逻辑推论，这是不是如有些人所说的那样“可以自由构造公理”呢？我们不妨引证数学家 Michael F. Atiyahde 的有关论述来说明。他说：“经常有人说，现代数学的特点就是建立公理系统的自由，言外之意就是说，我们不断地为自己发明一些新规则，搞一些同传统的数学问题无关的游戏。我认为这个观点是错误的”。他接着比较了物理学家与应用数学家使用“模型”和“纯数学家偏爱的公理”之间的联系，认为“实质上是二而一的。”“当一个应用数学家为一个物理过程建立理论模型时，他在做的事就是决定哪些物理因素是重要的，哪些可以忽视（至少在最初阶段），然后对他简化的假设做出理论上的推论（如果可能的话！）并满怀希望地把这些推论同物理现实加以比较”。“面对着越来越复杂的数学问题，纯数学家的反应实质上仍然一样，他们专心致志地考虑问题的各个方面，把它们变成公理，然后研究它们蕴涵的推论，像物理的情形一样，认识到形形色色的问题中哪些共有的特征应该抽出来加以公理化，这是一个经验与判断的问题。最终的严格考验就是对原来的数学问题是否有新的认识。”可见，这与先验的杜撰公理有着本质的区别。Felix Klein（1849—1925 年）在“关于第一次颁发罗巴切夫斯基奖金”中说得好，“按照我的意见，公理的真正本质在于对经验的资料的理想化。”因此，公理方法可以说是物理学“模型”方法的进一步抽象，是一个有着深刻客观基础的数学方法。

第四，从公理的辩证证明来看，数学公理是数学本身无法证明的，但公理系统的客观真理性却是可以辩证地证明的，即历史地实践地证明的。诸如等量公理，不等量公理，它们所以取得作为公理的权利，是以亿万人亿万次实践检验其正确性为根据的。

"人的实践经过千百万次的重复，它在人的意识中以逻辑的格固定下来。这些格正是（而且只是）由于千百万次的重复才有着先入之见的巩固性和公理的性质。"[1] 由于近代数学常常先选择一组逻辑上自足的命题作为公理，并且用演绎方法来建立学科体系（像罗氏几何初创时那样），这样的公理体系自然是数学本身无法证明的。它的真理性，只有当这一学科获得成功地应用之后，实验检验了这一学科内容的客观真理性，这一公理体系也就同时获得了辩证的证明。

综上所述，公理的辩证证明可分两种情况：

1. 公理本身经过实践检验→推出结论必与现实相符。

2. 公理只是假设→逻辑推理建立体系→实践应用检验数学体系的真理性。

从公理内容本身分析，公理系统的建立最后总要归结为辩证的证明。

近代数学公理系统，要求具备无矛盾性（和谐性），独立性与完备性。所谓无矛盾性，就是从公理出发，无论推论到多远，绝不会得出命题 A 与它的否定 $\overline{A}$ 同时成立。无矛盾性是构成公理系统的基本要求。

例如，在建立了的数的公理体系中，不能嵌入这样的新运算"*"

使 $$\frac{a}{b} * \frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

因为，设 $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$，$\frac{c}{d}=\frac{5}{7}$，则 $\frac{3}{4} * \frac{5}{7}=\frac{3+5}{4+7}=\frac{8}{11}=\frac{120}{165}$。

但 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$，等量代替，$\frac{6}{8} * \frac{5}{7}=\frac{6+5}{8+7}=\frac{11}{15}=\frac{121}{165}$。

所以 $120=121$ 即 $0=1$。因此，引进的新运算与原公理系统是矛盾的。

---

〔1〕 列宁：《哲学笔记》，北京：人民出版社，1974年版，第233页。

另外，从高等几何知识可知，在绝对几何中不能嵌入“三角形内角和大于180°”这样的公理，否则也会导致逻辑上的矛盾。

所谓独立性，是指在一个公理系统中每个公理都有独立存在的必要，不能由其他公理用逻辑方法推证出来。也就是要求公理系统中的公理个数要最少。

至于完备性，是指在公理系统中不能再增添新的公理了。事实上许多公理系统并不具备完备性。比如取消第五公设的几何公理系统所研究的几何称为绝对几何。绝对几何公理系统就不具备完备性，它还可以嵌入新的公理。添加第五公设后成为欧氏公理系统，添加罗巴切夫斯基平行公设则成为罗氏几何的公理系统。

在公理系统所要求的三性中，无矛盾性是最基本的。

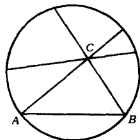
在数学中为了证明公理系统的无矛盾性（和谐性），常用模型法。这种方法的基本思想是构造一种实物作为公理系统的元素，把公理系统中元素之间的相互关系解释为这种实物和实物之间的一种具体关系。于是抽象的公理系统就由这种实物和实物之间的具体关系得到了一个实现，一个解释。也就是对这个公理系统建立了一个模型。如果实物与实物间的具体关系之间无矛盾，那就证明了公理系统的和谐性。特别是对现代高度抽象化的公理系统，直觉经验不能经常适用了，模型检验自然是最实际有效的一种反应现实的方法。例如，罗巴切夫斯基几何公理系统的和谐性可以用射影几何模型来检验。

如图（2-3-1），在所画的圆中：

点：圆内的点称为“点”。

直线：圆中的弦（不包括端点）称为“直线”。

平面：圆内部分（不包括圆周）称为“平面”。



图（2-3-1）

从图中可以清楚地看到：

“过直线 AB 外一点 C，可以作无数条

直线与 AB 不相交”。

要确立公理系统 A 的无矛盾性，可在已知无矛盾的公理系统 B 中来建立模型。而公理系统 B 的无矛盾性，可在已知无矛盾的公理系统 C 中建立模型来检验……。这样，最终总要有一个公理系统的无矛盾性是不能自身检验的，而要借助于数学方法之外用实践检验来完成，在数学中，一般最后化归为数公理的无矛盾性问题，而数公理的无矛盾性是在数学之外通过人的实践经过千百万次的重复证明的。因此，“公理的自明性是承继下来的，可以辩证地证明的。”（恩格斯语）

只有从理论与实践，主观与客观，归纳与演绎的对立统一中分析人们认识空间形式和数量关系的全过程，才能正确认识公理方法的客观性。现代数学公理方法对原始对象不加定义，只规定对象间所具有的某些基本数量关系，这正体现了数学高度的抽象性与广泛适用性的统一。公理方法表现形式的形式化深刻联系着它所包含的现实内容的多样性。数学公理方法是反映现实的，符合辩证唯物主义认识论的一种科学方法。公理方法在数学和其他自然科学中得到日益广泛的应用的事实，显示了这个方法的巨大力量！

四、数学公理方法的作用

从现代数学和自然科学与技术的发展来看，公理方法有着重要的作用。

第一，公理化方法是整理数学知识为一个严格逻辑体系，建立数学逻辑基础的方法。

首先，作为整理材料的作用，《几何原本》中的公理，皮亚诺自然数公理，20 世纪初概率公理的建立，都充分显示了公理方法整理数学知识的功能。用公理方法建构的体系，条理清楚，简明扼要，命题之间有机联系。每个命题都是这些联系中不可缺少的环节。这样建立的数学体系具有概括性，总结性，便于流传与推

广。

其次，形式化公理方法在数理逻辑的一个基本领域——元数学（即证明论）中得到充分的研究与发展。目前，它是研究数学基础问题的一个十分重要和广泛使用的工具。在这个意义上，它可以说是数学的一个基本理论，基本方法。许多现代数学理论的研究，如公理化集合论，代数的元数学，模型论等都与形式化公理方法分不开，许多重要的数学问题（如连续统假设，选择公理问题，非标准分析的模型问题）的研究也都和公理化分不开。

再有，通过形式化公理方法建立的形式系统，对于计算机科学有重要意义，因为它提供的形式语言和算法构成了计算机科学的必要前提和逻辑基础。

第二，数学公理化方法是探索新知识，发展数学的一种方法。首先，作为探索新知识的手段，常采用从一组假设的公理出发，由逻辑推理建立新的体系，看能否得出新的结果。若有新结果出现，则最终经实践检验而发展数学，甚至建立新的学科，有如非欧几何初建时人们的认识过程那样。

如果将一个无矛盾的公理系统减去一个或几个公理，然后再添加某些其他公理，则会建成新的公理系统。在这个公理系统也是无矛盾的情况下，可确立一种新的理论。研究这一新理论，常常可以从新的层面了解原理论的原理。例如研究双曲几何与非阿基米德几何能够弄清平行公理和阿基米德公理在限制欧氏几何中的意义。

如果无矛盾的系统 A 和系统 B 包含 $n-1$ 个完全一致的公理，而第 n 个公理是矛盾的，则 A 中第 n 个公理等价的命题与 B 中第 n 个公理等价的命题必是矛盾的。了解这一点很重要。比如，“三角形内角和$=180°$”“存在相似三角形”都等价于平行公理，并且知道双曲几何与欧氏几何的公理体系中仅区别在“平行公理”，则可以指出，在双曲几何中没有相似的图形，三角形内角和不等于 $180°$。其次，现代公理方法的力量还在于能把一个理论的算法

转移到另外的理论中去，促进它们的发展。例如几何上的点是不好对待的，要拟定一个能解决直线上点的集合性质的计算方法是很困难的。然而由于直线上点的集合同实数集同构，我们就能用关于相应实数集性质的问题去解决关于点集性质的问题。

更为重要的是，由于形式化公理中元素不加定义，因之可以有多种解释。这样一来，就公理系统结构研究出成果，只要应用于满足该公理系统的对象上去，就会得出不同的理论系统。

例如，对照表（2-3-1）。

表（2-3-1）

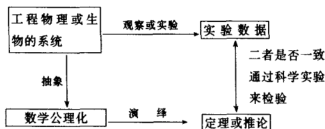
元素：点，直线，平面	元素："队员"，"小组"，"突击队"
公理 1　(1)平面 α 是一个点集，并且它至少包含两条直线。(2) 在平面 α 内的每一条直线是至少包含两个点的一个点集。	公理 1　(1) 突击队是一个突击队员的集合，它至少有两个小组。(2) 每个小组是突击队员的集合，它至少有两个队员。
公理 2　在平面 α 内每两个点有且仅有一在 α 内的直线包含它们。	公理 2　在突击队中任何两个队员必在一个且仅在一个小组内。
公理 3　在平面 α 内对每一条直线 m 和点 E(有且仅有一在 α 内的直线包含 E 且平行于 m) 在 α 内有一条且仅有一条完全不同的直线包含这一点。	公理 3　对突击队中任一小组和不在这小组的每个队员，必须有且仅有一个完全不同的小组使这个队员在内。
定理 1　平面 α 内两条不同直线不能有多于一个的公共点。	定理 1　在突击队内两个不同小组不能有多于一个的公共队员。
定理 2　若 A 是平面 α 内一点，在 α 内至少有两条直线都包含 A。	定理 2　若 A 是突击队员，则至少有两个小组都包含这个队员（即每个队员必须至少在两个小组）。

（续表）

元素：点，直线，平面	元素："队员"，"小组"，"突击队"
定理 3 若 A 是在平面 α 内任一点，则在 α 内至少有两条直线不包含 A。	定理 3 对每个队员必须至少有两个小组不包含这个队员。

这个例子，一方面可以理解公理的不同解释，另一方面，只要公理系统的定理已被证明，应用到具体解释中自然成立。这样，对一组抽象公理结构的研究，可以具体应用产生出许多分支的成果。

第三，数学公理化的方法对于其他自然科学技术部门给予实质性帮助，有着广泛的应用。首先，其他自然科学整理体系可以采用公理化方法，如质点静力学就是如此。其次，通过形式化公理方法建立一个数学系统，这是将数学理论应用于自然科学或工程技术的一个重要方法。这个方法的过程如图所示：



公理方法作为一种科学的数学方法并非万能的，如同一切方法一样，都有其局限性。公理方法本质上是个逻辑方法，因此，不能以为某个数学分支公理体系建立后，这个学科的发展就可以只靠逻辑推导而不再需要从现实中汲取真实的关系了。现代数学已经证明：任何一个充分丰富的形式系统（充分丰富是指它能够描述，表达算术系统）如果它是协调的，那么该系统内就存在一语句 A，使得 A 与它的否定 $\overline{A}$ 在该系统内都是不可证明的。这就是

著名的哥德尔“不完全性定理”。[1] 因此，试图把全部数学都形式公理化是不可能的。即希尔伯特的“证明论方案”是不可能的。哥德尔这一杰出成果是基于公理法而发现的新知识，并且指出了正是公理法自身的某种内在的局限。这表明了人们对公理法认识的进一步深化与发展。

思考题

1. 简述数学公理方法的产生及其辩证发展过程。

2. 近代公理方法有什么区别于朴素公理方法的特点？

3. 试从公理方法的客观性说明公理方法是一种科学的数学方法。

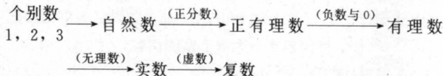
〔1〕 1931 年奥地利数理逻辑学家哥德尔证明了所谓“不完全性定理”，指出：即使是像算术或者含有算术的系统，如果它是协调的，则存在一个显然是真的命题 A，但不能从此系统的公理推出（即 A 不可证明）同时亦不可否证（即 A 的否定 $\overline{A}$ 亦不可推出）。哥德尔还指出：算术或者包含算术的理论的协调性，都不能用同一系统所建立的逻辑工具来证得。

第三章

数学概念的联系

第一节　数概念的扩充

人类对数的概念，有一个逐步发展的认识过程：



我们自然要问：数的扩充有什么客观根据？是由什么矛盾所推动？数的每一步发展基于数学内部的什么要求？数的扩充遵循什么基本原则？未来前景如何？这些问题都值得我们探讨、研究。

一、数概念发展的基本矛盾

数（shù）起源于数（shǔ），数（shǔ）东西是对离散集合的一种认识，人们通过比较发现了集合的一种性质。比如 8 个绳子结

即代表 8 条鱼的条数，也可以代表 8 个人的个数，然而又不是鱼也不是人，是“某个第三种”东西。所以每个单个的数，2、5 等等都是物体集合的一种性质。这种性质对于所有那些物体集合之间可以将其物体逐一对比的集合来说是共同的，对于那些不能将其物体逐一对比的集合来说是不同的，当然人们认识单个的数也是从简单开始的，远古人开始只能认识 1，2，3，比 3 大的统称为多，都“不计其数”。这表明对自然数的认识基于一与多的矛盾。

1. 一与多的矛盾与自然数。在认识自然数的过程中，一与多的矛盾起着主要作用。原始时代，生产力低下，能认识数目 1，2，3 这其中已经包含一与多。生产力发展后，猎获物的增加，一与多的矛盾就更加突出。

区分 1 与 2、3 这简单的多，发现 1 在一定条件下可转化为多。“1”累加起来，就由 1 产生多，这样开辟了人们认识自然数的途径。不管多么大的数量 N，都可以看作 N 个 1 相加之和。所以“1”是多的基数，多是“1”连加所得的和数。人们认识了自然数中简单的数及其运算，由加法本身就会提出由 1 发展为多的必然要求，$n+1=?$

由于人类实践范围的扩大，人们看到了任何数目的多在一定条件下也可转化为 1。1000 米的多以公里计就是 1，十万万公里的多以光年计也是 1，在自然数中，10^8 的多如以亿为单位则记为 1，所以“1”作为单位包含着无限丰富的内容。

人们将自然数如下分类：

自然数
- 单位 1…………………………………………………… “一”
- 质数——只有 1 与自身两个约数……………简单 } … “多”
- 合数——至少有一个 1 与自身之外的约数…复杂 } … “多”

因此，在研究自然数性质时总是要处理一与多，简单与复杂的矛盾。

1 是最简单的，它可以生成多，包含多：

$1=1^2=1^3=1^4=1^5=1^6=\cdots$

$$1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{6}{6}=\cdots$$

数学进一步发展，1 与多样化的形式之间可以互相转化，如 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，$1=\log_a a$，$a^0=1\ (a\neq0)$，$\frac{a}{a}=1\ (a\neq0)$，$1=\sin\frac{\pi}{2}=\text{tg}\frac{\pi}{4}$……这种转化是解决数学计算中的杠杆。在算术中有所谓"归一算法"，在解析几何中，常不失一般性设正方形边长为 1 等等。本质上都是利用 1 与多的转化来处理问题。

2. "有与无"的矛盾与扩大自然数。自然数，无论 1 还是多，都反映了"有"，捕到了猎物才会对猎物计数，当分猎物时，分到了猎物者意味着"有"，分不到猎物，或分光吃光后意味着"无"。"有"可以抽象为自然数 1，2，3，…。那么"无"这个量就抽象为零。零是任何一个确定的标志为"有"的量的否定。零是有内容的，并且有着丰富的内容。零并不是虚无。

一个自然数减去其自身还剩多少？剩"0"，因此"0"的产生有着数学内在的要求。在十进制记数法中，2 在个位是个 2，2 放在十位，个位就要放上一个 0 以后才表示二十，个位的 0 是只占位置的区别于 1，2，3，4，5，6，7，8，9 的一个实在的量。所以十进位置制记数法也要求符号 0 的产生。除了自然数之外又认识了零，就形成了扩大自然数。人们习惯称

0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，…

为扩大自然数列。

我们着重指出，0 是一个数量，其内容极其丰富。0 像自然数一样参与运算，并且比其他数有着特殊的个性：比如 0 是与其他一切量产生无限关系的惟一的数，$0\cdot a=0$，$\frac{a}{0}=\infty$，$\frac{0}{0}$可以等于任意实数。

在现实中零的意义并不意味虚无，而是标志着事物的某种界限。0℃是物质一个重要状态，在一个标准气压下水开始结冰。0K 也表明一个特定的状态，在这个界限上分子独立运动消失，物质

作为质量起着作用。地震震级是依地震波释放的能量来标定的：

0 级 6.3×10^{11}尔格，1 级 2×10^{13}尔格

3 级 2×10^{16}尔格，4 级 6.3×10^{17}尔格

5 级 2×10^{19}尔格，6 级 6.3×10^{20}尔格

7 级 2×10^{22}尔格，8 级 6.3×10^{23}尔格

可见震级中的 0 也是一个非常确定的状态，并非地震波不释放任何能量的意思。

3. “整与分”的矛盾与有理数。区分了有与无，在有中区分了一与多，并不标志人们认识数量之完结。事实上“多”本身也有无限丰富的内容。区分简单的一与多源于计数的需要，然而实践进一步发展，分配要更精细，测量要更准确，这样在连续量的分割与比较中，即从度量中产生了分数——用整数之比来表示数目。我国古代很早就认识了$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$等分数，并把$\frac{1}{3}$叫“少半”，“$\frac{2}{3}$”叫“太半”。《九章算术》“方田章”中已载有系统的分数四则运算，这些成就比国外对分数运算的系统教育要早得多，直到 1735 年英国算术教科书中还写道：“为了照顾学生们……我们把通常称为分数的破碎数的运算规则单独（在书尾）叙述。部分学生在看到这些分数时，就此停止学习，他们嚷着说‘不要再往下了’”。

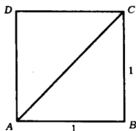
认识分数有着数学内部发展的要求，自然数集对除法运算并不封闭，当两个自然数相除，不能整除时，很自然地提出用这两个自然数之比作为一种新的数——分数。原来的数则称整数。认识了整数和分数，也就认识了（正）有理数。在（正）有理数范围加、乘、除（除数不为 0）都可进行，当减数不大于被减数的情况下，减法也可进行。人们对数的这种认识已能适应相当生产水平的要求，像古希腊的毕达哥拉斯学派就认为整数与分数合在一起已经完美了。

一个整数 n 可写成$\frac{n}{1}$表为分数形式。这样整数包含于有理数之中，整数可以转化为分数的形式，反之分数加减运算在通分取得公分母之后，实际进行的是分子部分的整数运算。也就是以前所认识的数都可以用两个整数之比的形式表示出来，统一于（正）有理数。

有理数仍保持整数原来的各种性质，但也产生了新的性质。比如扩大自然数是离散的，而有理数具有稠密性，两个有理数之间总还存在有理数，这为进一步认识连续量开拓了道路。

4. “有比与无比”和实数。整数与分数历史上都称为“有比数”，能用$\frac{q}{p}$的形式表示（其中 p、q 是整数，$p\neq 0$）。随着测量实践的需要，人们发现用正方形边长去量对角线永远量不尽，即正方形对角线与边长之比不能用整数或分数表示，因此称为“无比数”。

设正方形 $ABCD$ 边长为 1，如图（3-1-1）



图（3-1-1）

若$\frac{AC}{AB}=\frac{AC}{1}=AC$ 可表示为两个整数 p，q 之比，即由勾股定理得

$\left(\frac{q}{p}\right)^2=2$，$(p,q)=1$

则 $q^2=2p^2\Rightarrow 2|q^2\Rightarrow 2|q$。

令 $q=2m$　（m 是整数）

$\therefore\ 4m^2=2p^2\Rightarrow 2m^2=p^2\Rightarrow 2|p^2\Rightarrow 2|p$

这表明 2 是 p、q 的公约数，与 $(p,q)=1$ 矛盾。

$\therefore\frac{AC}{AB}$不能表示为两个整数之比的形式。

从数学运算上看，正有理数开方不一定总能开得尽。开不尽就得“无比数”。这样就产生了无理数。从实践上讲，无理数的产生解决了测量中量不尽的矛盾。原来有理数尽管十分稠密，但在

数轴上的排布仍是“千窗百孔”，这些空洞是被无理数填满的，无理数与有理数合在一起统称实数。

有理数与无理数最终在形式上用无限小数统一起来。有理数是有限小数或循环小数，而无理数是无限不循环小数。或者有如牛顿在《数学总论》中所刻画的实数之特征：“我们与其把数理解为单位的集合，不如把数理解为某个量对另一个被取作单位的量的抽象的比”。这个比数可以是整数、有理数或是无理数。

有理数是认识无理数的基础。在测量实践中首先认识正方形对角线与边长不可公度，圆周长与直径不可公度。后又发现自然对数的底数 e 是个无理数，然而关于实数的不直接依据几何的严格的数学定义直到 19 世纪 70 年代才给出，是由外尔斯特拉斯，戴・德金和康托分别在不同形式下给出的。从无公度线段到实数理论的建立历经这么长的时间，表明抽象概念的产生与精确化是极为艰难的工作。

从不可公度线段发现 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 的无理性，在公元 1500 年左右无理数的使用很随便，并且引入了种类越来越多的无理数。比如 Stifel 使用了 $\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$ 形的无理数，Vieta 考察单位圆内接正四、正八、正十六边形时，求出 π 的相关表达式

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\cdots$$

但关于无理数是否确实是数是有争议的、不放心的。如日耳曼数学家 M・Stifel 在《整数算术》中讨论用十进小数表示无理数时说：“在证明几何图形的问题中，由于当有理数不行而代之以无理数时，就能完全证出有理数所不能证明的结果。……因此我们感到不能不承认它们确实是数，迫使我们承认的是由于使用它们而得出的结果——那是我们认为真实、可靠而且恒定的结果。但从另一方面讲，别的考虑却迫使我们不承认无理数是什么数，例如，当我们想把它们数出来［用十进小数表示］时……就发现它

们无止境地往远跑，因而没有一个无理数实质上是能被我们准确掌握住的……而本身缺乏准确性的东西就不能称其为真正的数……所以正如无穷大的数并非数一样，无理数也不是一个真正的数，而是隐藏在一种无穷迷雾后面的东西”。这表明数学上新概念要突破原有概念的框架为人们所接受往往是要有一个历史过程的。

5. 正与负的矛盾与相反数。从数东西、量长度的实践中认识数量，可从个别数→自然数→扩大自然数→正有理数→个别无理数→正无理数→正实数。从数轴上看，认识了正半轴（原点及原点右边的点所表示的数）。随着生产实践的发展，对量的认识逐渐超出数（shǔ）个数，量（liáng）长短的局限，还要认识上升、下降，增加、减少，收入支出等具有相反意义的量，即不但要顾及绝对数值的大小，还要顾及相反意义。从数学内部看，当被减数小于减数时其差是什么？这个问题始终悬而未解。为解决上述矛盾，产生了正负数的概念。

正与负的概念在我国产生很早。在《九章算术》方程章中载有正负数加减运算的符号法则：

正负术曰

同名相除	$(+a)-(+b)=+(a-b)$
异名相益	$(+a)-(-b)=+(a+b)$
正无入负之	$0-(+b)=-b$
负无入正之	$0-(-b)=+b$
其异名相除	$(+a)+(-b)=+(a-b)$
同名相益	$(+a)+(+b)=+(a+b)$
正无入正之	$0+(+b)=+b$
负无入负之	$0+(-b)=-b$

这一成就要比西方早约1500年。后来负数通过阿拉伯人的著作传到欧洲，十六七世纪大多数欧洲数学家不承认它们是数，即使承认负数者，也并不认为负数是方程的根。如 15 世纪的 Nicolas

Chuguet（1445—1500 年）和 16 世纪的 Stifel（1553 年）都把负数说成是荒谬的数。Cardano 虽把负数作为方程的根，但认为它们是不可能的解，仅仅是一些记号，他称负根是虚有的，而正根才算实有的根。Vieta 完全不要负数。Descartes 只是部分地接受了负数，他把方程的负根称作假根，因为它们代表比无还少的数。Pascal 则认为从 0 减去 4 纯粹是胡说。神学家兼数学家 Antoine Armauld（1612—1694 年）曾提出怀疑：由 $-1:1=1:-1$，因 $-1<+1$，那么较小数与较大数的比怎么可能等于较大数与较小数的比呢？1712 年 Leibniz 承认这个反对意见合理，但又申辩说：可以用这种比例进行计算，因为它们的形式是正确的，正如我们能够用虚量来进行计算一样。

总之，十六七世纪，并没有很多数学家心安理得地承认负数是数。例如 Wallis 虽然比他那个时代的人先进并且承认负数，但却认为负数大于无穷大并非小于零。他在《无穷大算术》（1655 年）中论证说："由于比 $\frac{a}{0}$ 在 a 为正数时是无穷大，故当分母变成负数时，例如当 $\frac{a}{b}$ 的 b 是负数时，这个比必定大于无穷大"。可见负数概念被人们接受并理解是多么的艰难。

由于负数的引入，人们完成了对实数的认识，建立了实数与数轴上点的一一对应，并且正与负的转化使数学运算进一步统一，由于引入代数和的概念，加减运算完全统一了，对文字系数也可以按一般法则进行讨论。

6. "实与虚"的矛盾与复数。如前所述在解一元三次方程中，人们发现了负数开偶次方的运算，为了解决这一矛盾引入了虚数。历史上欧洲人还没有完全克服无理数与负数带来的困难，就又晕头晕脑地陷入如今被称之为复数的问题。Cardano 在解方程 $x(10-x)=40$ 求得根为 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$。然后他说"不管会受到多大的良心责备，把 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$ 相乘得其乘积为 40"。人们总觉得虚数是不"实在的"，因此迟迟不承认虚数，正

如 Leibniz 所说："圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚的 -1 的平方根"。

引入了虚数后，人们定义形如 $a+bi$ 的数（a、b 为实数）称作复数。$a+bi \longleftrightarrow (a, b)$ 在复数运算中实虚互相转化，而实数看作为虚部为 0 的复数。

二、数概念发展的辩证分析

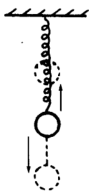
1. 数概念扩充的客观根据。人类社会初期，人们在考虑狩猎、捕鱼采集果实中出现的计数问题产生了自然数的概念。实践中反复出现某些东西从无到有从有到无的过程，使人们萌生了数零的概念。解决整数分不尽，度量中量不尽的问题产生了分数；探讨无公度线段产生了无理数；研究代数方程解法的一般理论问题产生了负数与虚数。从而使数的概念从有理数扩充到实数，最后扩充到复数。

数概念的发展也适应了解决数学内部矛盾的要求。负数解决了"不够减"的矛盾；分数解决了不能整除的矛盾；无理数解决了"开方不尽"的矛盾；虚数解决了"负数不能开偶次方"的矛盾。从而使数学运算的种种"禁区"一次又一次地被突破了。

当然，随着数的扩充，从整体上新的数集失去了原数集的某些性质而又增加了原数集没有的某些性质。如由有理数集扩充到实数集失去了可数性，由实数集扩充到复数集失去了大小可比性。但是另一方面，由整数集扩充到有理数集增添了稠密性，由有理数集扩充到实数集增添了连续性。从运算角度看，由自然数扩展到整数集增添了减法运算的封闭性；由整数集扩展到有理数集又增添了除法运算（0 不为除数）的封闭性；由有理数集扩展到实数集又添增了算术开方的封闭性；由实数集扩展到复数集又增添了代数开方的封闭性。在研究数概念的发展中注意扩充数集在整体性质上的变化十分重要。

2. 从数概念发展看数学概念的辩证性质。首先，数学概念是确定性与灵活性的统一。概念的内涵是确定的，又是随数学的发展而发展的。所谓概念的确定性，要有明确的定义，是指在一个时期、相对稳定状态而言，不是指整个概念发展的历史而言。因此并不排斥概念的发展。如数的概念、角的概念、方程的概念都有一个发展的过程，都是确定性与灵活性的统一。在数学证明中应该而且必须遵守概念的确定性，但作为数学发现的契机又不要墨守陈规。注意概念的灵活性，要善于捕捉并适应概念扩充的机遇或趋势。

其次，概念是主观的抽象形式与客观的具体内容的统一。比如虚数，它的抽象形式是显见的，但它所反映的具体内容则是客观的。



图（3-1-2）

挂在弹簧上的物体在弹簧作用力下运动，它的位置 x 与弹簧作用力 F 的关系 $F=-kx\,(k>0)\,k$ 为弹性系数。如图（3-1-2）

由 $F=ma=m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$

故 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{k}{m}x$

即 $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \qquad (1)$$

（1）式的特征方程为

$$r^2+\frac{k}{m}=0 \qquad (2)$$

（2）式有实根，即 $k=0$，反映物体不振动；当（2）式无实根时，$r=\pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，反映物体上下振动。

$x=e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}=\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+i\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$。可见虚数表征着物体实在的运动状态。

再次，数学概念是个别与一般的统一。比如 $\sqrt{2}$，π，e 是个

别的无理数，无限不循环小数是无理数一般形式的定义。由个别中概括出一般，而一般则包括所有个别。比如 0.1010010001…（在第 k 个 1 后面连写有 k 个 0，一直写下去所成的数）也是无理数。这样由具体达到抽象思维中的具体，才算真正把握住了概念的本质。

3. 数概念扩充的原则。数概念的发展过程向我们揭示了数集扩充的原则。

一般地，若数集 A 由某种需要将其扩张为数集 B 时，应遵守：

Ⅰ. 数集 A 是数集 B 的真子集。

Ⅱ. 数集 A 的元素间的基本关系（例如相等）和运算，对于 B 的元素也被定义，而且 A 的元素作为 B 的元素来说，这样的定义与原先在 A 中已有的定义相一致。数集 A 中的一些主要性质（运算律等）在 B 中仍然保持。

Ⅲ. 数集 B 解决了数集 A 所不能解决的矛盾。即 A 中不能永远施行的某种运算在数集 B 中应能永远施行。

Ⅳ. 扩集 B 应是原数集 A 的满足Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ的所有扩张中最小的，而且应由 A 在同构意义下是惟一确定的。

可以验证，我们介绍的数的扩充正是遵循上述原则的。

4. 数概念到了复数还能扩充与发展吗？数概念扩充到复数，人们对数的认识完结了吗？我们说又完又没完！

说完结了，是指满足下列十条性质的数的集合到复数集已经完备了。这十条性质是

（1）对任意两个数，它们的和是惟一确定的数

（2）对任意两个数，它们的积是惟一确定的数

（3）存在数 0，对任意 a，有 $a+0=a$

（4）对每个数 a，均存在数 x，使 $a+x=0$

（5）加法满足交换律　$a+b=b+a$

（6）加法满足结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

（7）乘法满足交换律　$ab=ba$

(8) 乘法满足结合律　$(ab)c=a(bc)$

(9) 乘法对加法满足分配律

$a(b+c)=ab+ac$，$(b+c)a=ba+ca$

(10)对于每一个 b 及每一个 $a\neq0$,存在惟一的 x,使得$ax=b$。

满足以上条件的数集实际上是数域。并且可以证明，如果不改变（1）～（10）中的某些要求，要得到一个广义的数系超过复数域是不可能的。在这个意义上，我们说人们对数的认识到复数为止已告一段落。

如果适当改变（1）～（10）中某些要求，还可以继续扩充，在这个意义下，认识又没有完结。人们正是由“实数对”定义复数那样，设想由实数组来建立多元数（或超复数）的。在 19 世纪中叶，英国数学家哈密顿引入了四元数，这种数不满足乘法交换律。今天四元数已经得到了重要应用，人们又用复数的数组来构作更高级的超复数。探索着数概念无限广阔的发展前景。

作为另一种意义下人们对数量的认识也在发展。自然数表示序数和个数。如果自然数“数完了”还怎么“数”？一个无穷集合的元素个数应当如何计数呢？

作为序数的拓广，设自然数集元素个数为 w，则可排一个序表：

$1, 2, 3, \cdots$

$w, w+1, w+2, \cdots$

$w\cdot2, w\cdot2+1, w\cdot2+2, \cdots$

$w\cdot3, w\cdot3+1, w\cdot3+2, \cdots$

……

$w^2, w^2+1, w^2+2, \cdots$

$w^2+w, w^2+w\cdot2, w^2+w\cdot3, \cdots$

$w^2\cdot2, \cdots$

$w^2\cdot2+w, \cdots$

$w^3, \cdots$

w^4，…

w^w，…

这些都是康托的第一批超限数。即康托所谓第二数类的数。

作为有限集合元素个数的拓广，引入集合势的概念。可数集元素个数，即势为$\aleph_0$—阿列夫0，表所有整数和分数集合中元素的数目；而线、面、体上所有几何点的数目，记为$\aleph_1$，可以证明$\aleph_0<\aleph_1$，而所有几何曲线的集合中元素的个数为$\aleph_2$。可以证明$\aleph_1<\aleph_2$。对集合的势，即无穷大等级的数目现在我们只认识了$\aleph_0$，$\aleph_1$，$\aleph_2$这三个等级，还没有人想得出一种能用$\aleph_3$来表示的无穷大数的计数对象来。“因此，我们现在的处境，正好跟我们前面的原始部族人相反；他有许多儿子，可却数不过三，我们什么都数得清，却又没有那么多东西让我们来数！”

思考题

1. 试分析数概念扩充中的基本矛盾。
2. 简述数集扩充的基本原则。

第二节　形概念的发展

任何物体都有形状，或大或小，或圆或方，或直或曲。任何物体之间都有位置关系，或远或近，或相离或密接，这些都表现为某种空间形式。人类对形的认识，最初是对物体形状的认识，而后发展为对空间性质的认识，进而深化为对抽象的、一般空间形式的研究。这是一个由简单到复杂由现象到本质的辩证发展过程。

一、形概念的产生

物体的形状大小位置关系是客观存在的。人们对物体形状的认识出于实践活动的需要，丈量土地，测量容积，计算时间，制造器皿都需要认识物体形状。

形概念本身是一种抽象的形式。几何学是抛弃物体颜色、重量、组成等属性只从形状、位置的角度抽象地研究空间形式。所以，现实世界物体间的关系，反映到几何学中只剩下抽象的图形之间的位置关系。点、线、面等几何元素是没有具体性的东西，是没法制造出来的。这种抽象是人们从个别、特殊的认识所升华形成的一般性的认识。我国古代《墨子》已总结有某些形的概念。如“无间”、“无厚”的“端”即指几何中的点。“圆——一中同长也”就是圆的定义，是从具体的圆形物体抽象出的一般性的圆的定义。这个抽象过程，“必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念”。应该说，当会把具体物体抽象为一般物体来研究时才算有了抽象的形的概念，才算有了真正意义的几何学。

二、认识形概念过程中的基本矛盾

从数学内部看，推动几何学发展的矛盾很多，我们择其中对初等数学起重大作用的两种进行分析。

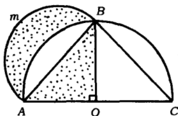
1. 直与曲的矛盾。“几何学开始于下列的发现，直线和曲线是绝对对立的，直线完全不能用曲线表现，曲线也完全不能用直线表现，两者是不能通约的”，这大体综合了几何学发展初期的情况。人们开始认识到的，首先是要区分直与曲、搞清直与曲的差异。在公元前 400 年以前，人们认识的曲线只有圆。因此最初几何学研究的图形是方与圆，使用的工具是“规、矩”，“不以规矩不能成方圆”，这种几何学称之为“方圆几何学”。认识直线形的性质比较容易，认识的结果相对比较精确；认识曲线图形较为困难，认识结果相对比较粗糙。比如对圆周率为“周三径一”、圆面积公式为$\frac{8}{9}$（直径）^{2}的认识，是非常粗糙的。

几何学的发展使人们逐渐探究曲直之间的相互转化。如何用尺规作图，作出一个正方形与一个已知圆面积相等，这一古老问

题的提出正是人们对曲直在一定条件下具有同一性以及如何实现这种同一性的一种尝试。

古希腊 Hippocrates 虽然没有解决上述的"化圆为方"问题，但却确实解决了这样一个问题：曲、直两个图形可以等积。

设$\triangle ABC$中$AB=BC$，$\angle ABC=90°$。以AC为直径画半圆，B点应在半圆上。再以AB为直径画半圆$\overset{\frown}{AmB}$。则有月牙形面积等于$\triangle AOB$的面积，如图（3-2-1）。



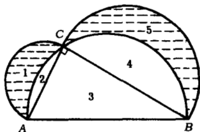
图（3-2-1）

因为

$$\frac{\text{半圆}\overset{\frown}{AmB}\text{面积}}{\text{半圆}\overset{\frown}{ABC}\text{面积}}=\frac{\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2/2}{\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2/2}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2=\frac{1}{2}$$

所以，半圆$\overset{\frown}{AmB}$面积$=\frac{1}{2}$（半圆$\overset{\frown}{ABC}$面积）=扇形AOB面积，减去两个阴影之间的空白弓形面积，得

月牙形面积$=\triangle AOB$的面积。



图（3-2-2）

一般地，在直角$\triangle ABC$中（$\angle C=90°$），以斜边AB为直径画半圆，C在这半圆上，然后再分别以AC、BC为直径向形外画半圆，则两个月牙形阴影面积之和等于直角$\triangle ABC$的面积，如图（3-2-2）：

事实上由勾股定理，得

$$AC^2+BC^2=AB^2$$

所以
$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}\left(\frac{BC}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

即　半圆（AC）面积+半圆（BC）面积=半圆（AB）面积

(①+②) + (④+⑤) =②+③+④

所以　①+⑤=③　成立。

以上关于直与曲同一性的认识，还局限于“面积相等”的关系。而实际上“连圆的计算也只有用直线来表现它的圆周时才有可能”。人们发现了用直线形可以逼近曲线形，以直代曲，这为解决直曲矛盾走出重要一步。“周三径一”的圆周率虽不精确，但在古代曾毕竟是一个相当实用的 π 值。只要看到这是用内接正六边形周长替代圆周长的结果，就会看到它是割圆术发展的基础。“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”当极限概念产生后，在极限过程中，直与曲融合在一起，在无限的过程中实现了直曲的转化。

然而一般的曲线要比圆复杂的多，在初等几何中用极限思想解决直曲矛盾所能实现的只有圆、抛物线、圆锥、圆柱、圆台等极简单的情况。而对一般曲线的研究是在笛卡儿坐标法产生以后，人们才为更深刻地认识曲线找到了新的途径。在解析几何中对一般的二次曲线或更复杂的用极坐标表示的曲线以及空间二次曲面进行了研究。那么对更为复杂的曲线、曲面如何认识呢？从局部性质研究入手有微分几何的发展；从整体上入手有代数几何的发展。人类对曲的认识是从直开始，直直曲曲，无穷无尽无止无休。随着方法的不断更新带来了研究的层层深入。可简要归纳如下：

研究方法
- 综合方法——初等几何(直线、圆)
- 分析方法
  - 代数法(坐标法)—
    - 解析几何:二次曲线、曲面
    - 高等几何:三次代数曲线、曲面
  - 无穷小分析方法—微分几何研究一般的曲线曲面

2. 平行与相交的矛盾。过直线外一点只能作一条直线与已知直线平行，这是整个欧氏几何的基本出发点。它反映了人类早期的认识：同一平面上的两条直线不平行必相交，不相交则必平行。

其实，平行与相交不可分割，认识平行离不开相交，认识相交也离不开平行，这在平行线的性质与判定中表现极为突出。判

定两条直线是否平行是在这两条直线与第三条直线相交所成角的关系中去判定的。证明三角形内角和等于180°的定理，表现的是三条两两相交直线的关系，恰是通过一个点引平行线去完成证明的。另外，要证平面上二直线相交，只须判定它们不平行即可。这些都反映出人们对平行与相交的矛盾初期认识的情况。

平行与相交的矛盾中，平行起主要的作用，人们为了研究平行的性质，扩大了对几何学的认识，引出了对空间观念的深刻的变革。

过直线外一点能引几条直线与已知直线平行呢？是一条都不能引，还是只能引一条，还是可以引无穷多条？这涉及到平行与相交的对立在什么条件下成立的基本问题。这个问题的解决导致了非欧几何的诞生，从而拓宽了人们对空间概念认识的视野，回过头来也更深刻地认识了欧氏几何，即欧氏几何作为真理的适用条件搞清楚了。

此外，一定条件下平行与相交应当“是一回事”，又成为了解决直曲矛盾的一个手段。比如极坐标系中曲线弧长的计算如图(3-2-3)，在 Pm 上取点 R，使 $PR=PM$，将 PM，Pm 二相交线看成平行线，这时 $\triangle MRm$ 中，$\angle MRm=90°$，应用勾股定理可得 $ds=\sqrt{(\rho d\theta)^2+(d\rho)^2}$，这里将二相交线在一定条件下看作平行线是整个推理的基础。

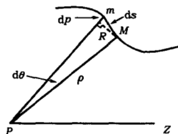


图 (3-2-3)

总之，以上两对矛盾“曲与直”，“平行与相交”错综复杂，直与曲的矛盾的提出与不断解决推动人们对图形性质认识的深化。平行与相交矛盾的提出和解决打开了人们认识各种各样空间的窗口。

三、几何学的发展

1. 公理方法与综合几何。人类在古代积累了丰富的几何经验

公式和知识，这个时期，人们把图形看成是静止的、既成的东西。一个问题拿来从经验中知道应该“这样做”“做这个”，从而得出解答。在这个基础上产生的方法上的突破是提出了这些解答，这些几何事实是从哪里来的？应当怎样判断它们是正确的？即判明它们不仅在特殊情况下是对的，而且在一般情况下也是对的。正是由于思考方法发生了这样的变化，希腊数学家才找到了一条正确的途径，把几何学建成为一门科学——它所用的方法是逻辑推理的方法，它的特殊形式就是数学上公理化的方法。

公理化方法把空间形式分解为最基本的元素：点、线、面，用公理来规定点、线、面之间最基本的关系，再用形式逻辑规则来推证一系列的性质。这种几何叫做综合几何。

综合几何研究最详尽的图形是三角形与圆。多边形可以分解为三角形，斜三角形可以分解为直角三角形这种最简单基本的类型，任意三角形的边角关系也是通过与直角三角形的联系来实现的。为认识三角形中的边角关系，还要进一步研究三角形与圆的联系，为三角学的形成打下了基础。

2. 坐标方法与解析几何。为了进一步认识多种曲线图形，当然这不只是纯思维的要求，而是应用机械曲线的现实要求。因此，首要的问题是打破静止的观点，从点运动生成线，线运动生成面，面运动生成体这种联系出发，使思想突破孤立静止的局限，在研究手段上由笛卡儿创立了坐标法，对运动变化关系给以定量的刻画，从而开辟了用数量计算来刻画图形性质的新途径。

坐标方法有着重要作用，笛卡儿认为数学的主要作用在于说明自然现象，他说过“我决心放弃那个仅仅是抽象的几何，这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来练习思想的问题。我这样做，是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何”。由于自然现象都是变易的，所以必须把以前说明静止状态的数学加以新的解释。把静止既成的曲线，看成是由一点变动所生成，讨论图形看成是讨论点运动的轨迹，这样才适合于说明变动的自然现象。

解析方法的第一个作用就是利用静止的几何知识来说明动的自然现象。

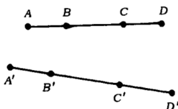
自然现象变化是有规律的，变化过程在解析几何中可用图形表示。因此，解析方法的第二项作用是如何用图形的规律性来表达变动现象的规律性。而且要把这些规律用简单明确的形式表示出来。

现象变化有量变质变两种形态，解析几何是以图形来表达量变的过程，而量变又是以数值变化来表示的，就不能不把作为几何对象的图形与作为代数对象的数结合起来，所以解析法的第三个作用是把数与形统一起来了。

要说明精细而复杂的变化必须利用分析学，分析学处理的对象是变数，因此要用图形来表达精确变动的直观形象，就不能不以数形统一的解析几何为基础。

解析方法，使点与实数对建立一一对应，把 $f(x, y)=0$ 看作动点的变化运动，这样就从曲线生成的角度看问题，研究方法发生了新的变化。此时运动进入了数学，辩证法进入了数学。这是数学中一次重大的突破。

3. 变换方法与变换几何。点的运动生成曲线，这是一种运动。一个图形发生变化也是运动。为了研究图形在运动中的性质。人们运用集合论中映射的观点，将图形的运动视为是使图形从一个位置变到另一个位置的映射——即变换。不同的变换，对图形产生不同的效果。因此，研究一个图形所经历的变换的特殊性质，就能使人们更深刻地认识运动。$A \xrightarrow{f(A)} B$。我们关心的是图形 A 经过变换 f 后变为图形 B，A 的哪些性质变了，哪些性质不发生变化，只有这样人们研究的才是图形所经历的运动的本身。这时的几何学就更加抽象了，在这种几何学中空间形式本质上说也表现为一种量的关系了。以变换方法研究的几何统称为变换几何，如仿射几何、射影几何等都是变换几何。



图（3-2-4）

四、对空间认识的深化

由对平行公理的研究、非欧几何的确立，打开了人们进入广袤空间的窗口。除了现实生活的空间，还存在着丰富多彩各式各样的空间，这样就引起了空间观念的深化。

首先，射影几何、仿射几何是继欧氏几何之后产生出来的独立的几何理论。欧氏几何主要研究空间的度量性质——与图形大小的测量有关的性质，只是顺便讨论一下不与测量相关而与图形相互位置的量的特征相关的性质。再进一步抽象，在几何属性方面也不是保留全部，而只是保留部分。比如射影变换下，直线上四个点的二重比不变，即 $(A, B, C, D) \longrightarrow (A', B', C', D')$ 则

$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DC}=\frac{A'C'}{C'B'}:\frac{A'D'}{D'B'}$，即

$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DC}$是个不变量。

又如仿射变换，使笛卡儿直角坐标系中的点 (x, y, z) 在仿射变换下变为点 (x', y', z')，即：

$$(*)\begin{cases}x'=a_1x+b_1y+c_1z+d_1\\y'=a_2x+b_2y+c_2z+d_2\\z'=a_3x+b_3y+c_3z+d_3\end{cases}\quad 其中\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$$

在变换（*）下，直线变为直线，平行关系不变，体积的比值不变等。特别是椭圆变椭圆、双曲线变双曲线，抛物线变抛物线。因此当人们只考虑图形的仿射性质时，可以抛弃所有其他性质来设想空间，把抽象的具有上述仿射性质的点、直线、平面的集合连同它们的性质的体系就叫做仿射空间。同样的方法可以建立射影空间，还可以研究图形在连续映射下的不变性质而得到所谓的拓扑空间……这样，我们把空间的性质按它们的深度和稳定

性而分出了层次。

其次，在解决代数与分析时利用几何想法的倾向，启发人们由类比的方法提出了 n 维空间的概念。坐标法的建立实现了代数方法与几何方法的联系，一个代数问题往往有着几何解释。比如不等式 $x^2+y^2<N$，有多少整数解的问题等价于在半径为 $\sqrt{N}$ 的圆内包含着多少个整点。依此类推，$x^2+y^2+z^2<N$ 有多少整数解的问题可以解释为半径为 $\sqrt{N}$ 的球内有多少个整点。进而会提出：$x^2+y^2+z^2+t^2<N$ 的整数解的几何解释是什么？一维直线的点由一个坐标来确定；二维平面上的点由（x，y）确定；三维空间的点由（x，y，z）确定。人们有必要自然地把（x_1，x_2，x_3，x_4）看作四维空间的点……把（x_1，x_2，…，x_n）视为 n 维空间的点。同样可以类比地推广定义 n 维空间的直线与平面等等，而且可以定义 n 维空间两个点（x'_1，x'_2，x'_3，…，x'_n）与（x''_1，x''_2，x''_3，…，x''_n）间的距离 d 为：

$$d=\sqrt{(x'_1-x''_1)^2+(x'_2-x''_2)^2+(x'_3-x''_3)^2+\cdots+(x'_n-x''_n)^2}$$

引入 n 维空间概念是有现实基础的。比如一个刚体运动时，用不在一条直线上三点可以决定刚体位置，这三点共有九个坐标，由于刚体中任两点距离在运动中保持不变，这是三个约束条件。于是这九个坐标中只有 6 个是独立的，所以由 6 个独立的坐标分量值就可以决定刚体的位置。我们可以用六维空间中的点来描述刚体的运动。一般地，n 维空间乃是用来描述具有 n 个自由度的力学系统的工具。但是有些力学系统具有无穷多个自由度——例如梁的振动问题，一般地从质点力学过渡到连续介质力学，因此，就要从有穷自由度系统过渡到无穷自由度系统。这就需要无穷维空间的概念，比如现代物理学中的量子场论就是研究无穷自由度的。在实际研究中，也需用多维概念处理问题。比如研究三种气体的混合，混合物由温度 T、压力 P 和两种气体的百分含量 C_1 及 C_2 四个条件所决定（第三种气体的百分含量 C_3 由 $C_3=100-C_1-C_2$ 来

决定)。因此这四个参量决定了混合气体的状况。它的图像要么须要联合几个图表,要么必须把这个状况设想为四维空间的一个点。在化学研究中运用多维方法早已被美国学者克卜斯和苏联化学家库尔纳可夫研究过了。这表明引入多维空间是为了保留方便的几何类比的倾向和从简单的图像表示法出发的想法。

可见，多维空间并不神秘，如果某个图形或某个体系的状况可由 n 个独立的条件所决定，则这个图形，这种状况就可以理解为某个 n 维空间的点。数学家之所以拟定多维空间的概念，是为了用几何语言来叙述那些不能作普通意义下的简单几何表示的事物。它的现实需要来自科学研究，绝不是无聊的概念游戏，它反映的事实是：存在着由若干个条件决定的事物，因此这些事物的集合就是多维的，维数正是决定这些事物的条件数。所以多维空间方法是一种刻画现实事物现象的数学方法。

多维空间是高度抽象的概念。是现实空间概念在数学中的拓广，这时空间含义已经不是现实空间之意，而是具有若干个条件的事物集合。所以不能站在现实空间直觉的框架中去理解多维空间，更不能要求在现实空间生活中看到多维空间的许多奇妙的性质。比如四维空间是由四个坐标决定的。因此，人们可把 (x, y, z, r) 看做四维空间的点,历史上有不少人错误理解四维空间的性质，要求在现实空间中加以证实，从而陷入唯心论的泥坑，比如德国数学家策尔纳就是其中的一位。在四维空间中，一个封闭金属球不用钻孔就可以像翻手套一样把它翻过来，一根两端都没有尽头或两端都被系住的线可以打结，两个分离的闭口圆环不打开其中的任何一个就可以套在一起，策尔纳教授居然请求神媒帮他确定四维空间中的各种细节。正如恩格斯所指出的:“只要我们习惯于给 $\sqrt{-1}$ 或第四度空间硬加上某种在我们的头脑以外的实在性,那么我们是否再往前走一步,是否也承认神媒的神灵世界,这就没有什么特别大的重要性了”。这段话对澄清对多维空间性质的误解仍有教育意义。

随着空间概念的推广。也引起了几何对象的扩充或推广，空间发展为抽象空间或一般空间，空间在科学中有着两重意义：其一，是普通的现实空间——物质存在的普遍形式。其二，是抽象空间——某一类对象（现象、状况）的集合，在其中存在着与空间相类似的关系。然而普通空间也理解为某种状态的集合，理解为极其微小的物体“质点”的所有可能位置的集合。这样，空间概念就更加抽象化了，得出了广义的空间概念。广义空间概念中容纳着的几何对象就更广泛了。比如，经验表明，正常人的视觉是三色的，即每一种颜色都是由红色（K）、青色（3），蓝色（C）三色合成。设它们的强度分别为 x，y，z，其颜色 Ц$=xK+y3+zC$，那么每一种颜色都可以看成一个颜色空间中的点（当然与普通坐标不同，强度是非负的，当 $x=y=z=0$ 时完全是黑色，对应于没有光线）。颜色的连续改变可以表示成颜色空间中的曲线，譬如彩虹就是这样一种曲线，在颜色空间中“点”是颜色，“线段”AB 是由颜色 A 和 B 按不同比例混合而得到的各种颜色的集合的连续点列。“点 D 的线段 AB 上”，则表示颜色 D 是颜色 A、B 的某种混合，三种颜色的混合给出平面块——“颜色三角形”。这一切都可以由颜色的坐标 x，y，z 写成解析式子并给出颜色直线、颜色平面的类似于普通解析几何中的公式。此外，在物理学中，一个体系有 n 个自由度，这表示它的状况可以随每一个决定这种状况的量的改变而向 n 个独立的方向变动。因此，它的所有状况的集合可以看作 n 维空间——体系的“相空间”。也就是这种或那种对象的连续集合被解释为某种空间，完全类似地可以讨论“曲线空间”、“凸体空间”……。所以，这样就使空间概念达到了极度抽象的地步：数学中所谓“空间”一般地是指某种对象（现象、状况、函数、图形、变数的值等等）的任何集合，在这种对象之间有类似于普通空间中的关系（连续性、距离等）。这样，把对象的给定集合视为空间，除了那些决定所考虑的空间相类似关系的性质之外，抛弃了这些对象的其他一切性质，这些关系是本质上决

定那种可以称为空间结构或某种“几何”的东西，对象本身构成这种空间中的点，点的集合就构成空间中的“图形”。

五、哪种几何是真实的?

空间是物质存在的形式。欧氏空间的几何是欧氏几何，黎曼空间对应的是黎曼几何，抽象的几何在其某些部分可以看作空间可能性的理论。但事实上欧氏几何结论人们易于接受，非欧几何结论往往觉得“不好理解”。因此提出哪种几何对于现实世界是真实的问题。

在现实空间中“位置”、“点”、“方向”等都是由物体决定的。“这里”,“那里”等也只有在与这个或那个物质对象的联系和关系中才有意义，是指由这些或那些物质特征所决定的位置，空间作为物质存在的形式，对象的形式由其余各部分的联系和关系所决定，空间的结构是一系列物体的关系和现象的规律性，即空间关系、对象的空间顺序及其相互关系等等。正如每一个形式都不能脱离内容一样，不能由于“抽象空间”概念的引入而认为存在没有物质的“孤立”的空间。因为在完全没有物质踪迹的绝对“空”的空间中无法区分任何位置、任何方向，因此也就没有位置、没有方向，而在抽象空间概念中包含着位置、方向、距离的可区别性，这种可区别性正反映了“抽象空间”是来源于现实空间中的一种抽象，所以“空间的性质”，是物质性质的抽象，是物体的已知关系、相互位置、大小等等性质的抽象。

任何一种几何都是现实的在一定条件下的一种近似，欧氏几何适合于人们日常生活中的感觉，人们觉得欧氏几何结论很实在。但物质世界不能全凭感性直觉去把握。比如微观、宇观很多规律无法看到、摸到，光速看不到，只能用思维去把握，无线电波不像水波那样直观看到，也只能用思维去把握。既然大范围三角形内角和与180°有差异，这正是用思维进一步认识了的现实空间的一种特性，这是没什么可奇怪的。

这么多种空间，这么多种几何，其中哪一种是真实的呢？因为任何几何都是对现实世界在一定条件下的近似，那么在哪种条件下它与现实相符合，它们在那种条件下就是真实的。事实上欧氏几何是以刚体的普通力学运动作为移动的几何，而在相对论中黎曼几何起着重要作用。所以，几何学作为与物理学相联系的关于空间性质的科学，它依赖于物理学，而且只有在抽象中，在一定范围内才能离开物理学而独立。几何学的规律在过渡到新的物理现象里可能改变，表明了几何学对物理学的依赖性和空间性质对物质的依赖性。爱因斯坦相对论证明了空间与时间有不可分割的密切关系，它们共同组成物质存在的统一形式：时空的四维流形，世界上的事物由位置和时间来刻画。因此要用四个坐标 x、y、z、t，所以它是一个四维集合。其实 x、y、z、t 四维坐标早在拉格朗日在考虑质点运动时就已应用过，但在旧的力学中时间是一种绝对的量，而爱因斯坦相对论的发现指出绝对时间在现实中是不存在的。它确立了空间和时间的相互关系。因而就有了物质存在的统一形式的理论。

由现实空间发展到抽象空间，再由抽象空间中的几何理论来认识现实空间的性质，近十年来分形几何的发展又突破了空间维数为整数的观念。随着数学的发展，人们对空间形式的认识在日益深化之中。

思考题

1. 试分析认识形概念方法的变革与几何学的发展。
2. 如何认识数学中抽象的空间概念？

第三节　函数概念的演化

函数概念是数学中重要的基本概念。“秩序、规律性等等概念

在一定条件下可以用数学上规定了的函数关系来表达”。[1] 函数在研究自然规律中有着重要的作用。

一、函数概念的由来

数学家对函数概念的产生，有各种说法，甚至有人追溯到了古代对图形轨迹的研究，认为这就是函数概念的萌芽。马克思分析了函数概念如何从数学自身发展而来，是很值得人们学习的分析事物的方法。数学的发展如何蕴育了函数概念的胚芽，而后脱胎成一个新的概念应是我们关注的焦点。马克思在《数学手稿》中对函数概念的考察，概述了函数概念从萌芽到初步成熟阶段的过程。

数学研究的是现实世界的空间形式与数量关系，涉及空间形式的内容一般属于几何学所研究的，涉及数量关系的内容则属于算术和代数所研究的。那么算术与代数是研究怎样的数量关系呢？比如算术中，研究的是具体的确定的常数以及它们之间的关系，无非是具体数字和这些数之间的四则运算关系。其中研究的对象是具体的确定的常数，所研究的关系是具体确定的常数之间的运算关系。而在代数中，情形就发生了变化。如果说，算术中我们研究具体数的运算，如 $1+2$，2×3 等等，那么在代数中则研究一般数的运算如 $a+b$，$p\cdot q$ 等等，代数的特点就是由文字代替数，也就是由研究个别具体的数发展到研究一般抽象的数——文字所代表的数，由确定的常数发展为不确定的常数。因此，代数学中研究不确定的常数和确定的常数之间的运算关系，这种确定的常数与不确定的常数的对立统一，构成了初等代数学的一个基本矛盾。比如代数方程式，就是已知的确定常数与未知的不确定常数之间的对立统一体。

正是在方程的研究中，人们发现了常数之间不仅有运算关系，

[1] 《列宁选集》人民出版社，1972 年版，第 2 卷，第 160 页。

还有一种**互相依赖**的关系。这是人们研究未知数个数多于方程个数的不定方程时，发现的一种新的关系。

例：求两个正整数，其和等于 10。

解：设这两个正整数分别为 x 和 y。

由　$x+y=10$，得 $y=10-x$，这时

当　$x=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 时，

$y=9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$。

可见未知量 y 的值依赖于未知量 x 的值，并且根据 x 的由问题所规定的范围 1—9 内所任意取的值而变化。这时，人们就把这种两个不确定的常数之间的这种新的关系称为函数，叫 y 是 x 的函数。

在 $y=10-x$ 中，10 是确定的常数，而 x 本身却是有变化的，它的变化表现为可在一定范围内任意给它以不同的数值。那么 x 是不是变量呢？马克思经过研究后认为：x 虽然可以取值 1，2，也可以取值 8，9，但 x 本身并不发生任何使它由 1 变为 2 或由 8 变为 9 的变化，也就是 x 的自身并不体现变化。所以 x 不是变量，仍然是一个不确定的常量。

可见，在常量数学范围内，数量之间的关系虽然总的说来是确定的运算关系，但在不定方程式中已经蕴涵了一种依赖关系，这正是认识函数的萌芽。"函数（Funktion）一词，最初是在处理方程个数少于其中出现的未知数个数的所谓不定方程时，引到代数中来的。这里，例如 y 的值的变化取决于人们譬如对 x 给予的数值 3，4，5 等等。这里 y 就叫做 x 的函数，因此它必须服从 x 的命令，正如每一个官员（Funktionär）甚至于伟大的威廉一世，也要依从某个人一样"。[1]

以上就是从数学内部发展来看，对函数概念由来的简单分析。

由不定方程所限定的几个不确定常数之间的依赖关系到对变

〔1〕马克思：《数学手稿》人民出版社，1975 年版，第 190～191 页。

量函数的一般认识,经历了一个由个别→特殊→一般的认识过程。

1. 由不定方程中不确定常数之间的依赖关系，通过类比而推广到用代数方程表示出来的一类函数。即代数函数，其依赖关系可以用解析式子表示。这只是依赖关系中的个别情形。开始莱布尼茨仅用函数表记幂 x, x^2, x^3 等，直到 1748 年伯努利在“无穷小分析引论”中才把能给出“解析的表示”的通称为函数。

2. 函数概念进一步被拓广，表现在 n 个量之间不一定要有方程，只须要它的值依赖于其他量的值就可以了。对应关系不一定要通过代数式的运算来表达，比如用单位圆的线段来定义三角函数的值，即对应关系不必一定是解析式子表达的形式。

3. 由于笛卡儿坐标法的引入,未知量 x,y 等具有了变量的意义，而已知量成了常量，这时函数概念表现为一个变量对另外变量之间的依赖关系。“一个变量的函数是另外一个变量，它的值随着前者的值而变化，也就是依赖于前者，它与不定方程中的函数具有共同点，如果给变量一个特定的值，那么，这变量的函数就得到一个确定的相应的值”[1]。马克思概括的第一句话说明函数概念是描述变量之间的依赖关系，这与不定方程中不确定常数之间的依赖关系有质的不同。第二句则说依赖关系在数学表现形式上与不定方程的函数具有共同点——即值之间的对应关系。

恩格斯也曾论述过，变数 x，y 是“在变化时彼此呈现一定的关系的数”[2],“两者之中有一个变化，另一个也按照条件所规定的关系同时变化。[3] 这与马克思的概括意义相同，都是对变量函数概念形成时情况的概括,大体相当于欧拉于 1755 年关于函数的定义时的情形。

〔1〕 马克思:《数学手稿》人民出版社，1975 年版，第 190 页。
〔2〕 《马克思恩格斯全集》第 20 卷，第 675 页。
〔3〕 恩格斯:《反杜林论》人民出版社，1970 年版，第 135 页。

二、函数概念的本质

我们以 $y=x^2$ 为例分析函数概念的本质。

1. 在抽象出的具体函数关系中，x、y 的地位与作用是不相同的。因为客观事物的联系在分割开来考察时，总有确定的因果关系。在 $y=x^2$ 中，x 处于主动地位，我们称自变量，y 处于被动地位，我们称因变量。y 与 x 的关系是自变量与因变量的关系，其中自变量处于主动地位，因变量处于依从地位，所以自变量的变化处于主导地位。

2. y 与 x^2 之间用等号连结，但不是简单的数量上相等的关系，而是变量 y 与 x^2 之间的等价关系。等式左右两边 y 和 x^2 都是依赖于 x 的，这是同一性，但又包含着不容忽视的差异性：左边的 y 我们只知道它依赖于 x，但按怎样确定的方式依赖于 x，并没有表达出来。马克思称它为“依赖于 x 的函数”。而右边的 x^2 是直接用 x 的组合表示出来的，马克思称之为“用 x 表示的函数”。$y=x^2$ 表明 y（依赖于 x 的函数）和 x^2（用 x 表示的函数）之间的等价关系。只有这时左边才是右边数量大小的表现。因此函数 $y=x^2$ 左右两边是抽象与具体的统一。左边的 y 是抽象的，右边的 x^2 是具体的，因此活动的主动性在右边。也就是说，对于研究函数，我们关心的是用 x 表示出来的具体的依赖关系。

3. $y=x^2$ 反映的是变量与变量之间的关系。但从式子本身看，我们直接得到的是状态间的关系，其中 x，y 之间可变性的关系虽然是变量本身所固有的，但是在关系式 $y=x^2$ 中却是隐藏着的。所以函数关系是 x、y 之间明显的状态关系与隐藏的可变性关系的统一体，而函数关系式揭示明显状态关系是主要的方面。

根据以上分析，由第1点，自变量与因变量的主从地位中，自变量处于主导的地位，那么自变量的变化范围——定义域与因变量的变化范围——值域中，值域是由定义域经过函数关系所决定的。因此自变量的变化范围起着主要的决定作用。这表现在数学

上，将自变量的变化范围——定义域，作为函数的基本要素之一。

由第2点分析的抽象与具体的对立统一，也就是“依赖于x的函数”与“用x表示的函数”二者的对立统一。其中“用x表示的函数”起主导作用。因为对一个函数，我们不但要了解y依赖于x，而且更重要的是了解y按照怎样的条件所规定的关系依赖于x。要确定一个函数，只抽象地知道y依赖于x是不够的，我们的目的在于要知道y怎样具体地依赖于x。在数学上就是要确定具体的对应法则。所以对应法则是构成函数的另一个基本要素。

由此可见，函数的基本要素有两条：(1) 定义域；(2) 对应法则。只要这两条确定了，函数就完全确定了，抓住了这两条，就在数学上抓住了函数概念的本质。

例1. $y=x^2$ $(-\infty<x<+\infty)$ 与 $s=t^2$ $(-\infty<t<+\infty)$ 在数学上代表完全相同的函数，它们定义域相同，对应法则的表示式相同。至于用什么字母表示自变量、因变量并非本质问题。

例2. $y=x^2$ $(-\infty<x<+\infty)$ 与 $y=x^2$ $(0\leqslant x<+\infty)$ 是不同的函数，对应法则的表示式虽然相同，但定义域不同。

对应关系是否相同的实质不在于表达式形式是否一样，而在于同一个x是否对应着相同的y值。

例3. $y=\begin{cases}x & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$ 代表同一个函数。

例4. $y=\dfrac{|x|}{x}$ $(x\neq 0)$ 与 $y=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$ 代表同一个函数。

至于第3点，明显的状态关系与隐藏的可变性关系中，明显的状态关系是主要方面。函数刻画运动主要是从状态方面来表现运动，是从运动的反面“静止”来度量运动。而要揭示y与x之间的可变性关系，函数工具是有局限性的，这是数学分析发展中要进一步解决的课题。

三、函数概念的演化

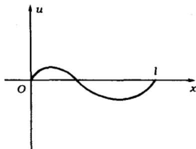
函数的经典定义产生并非很久，在函数概念发展道路上有过激烈的争论，争论的结果是丰富与发展了函数概念。

最初的函数概念是把函数作为幂的同义词，函数即幂，幂即函数，这是函数概念的解析起源。1692 年莱布尼茨给出定义如下："像曲线上的点的横坐标，纵坐标，切线的长度，垂线的长度等等，所有与曲线上的点有关的量，即称为函数"，这可作为函数概念的几何起源。

1718 年，约翰·伯努利给函数如下定义："变量的函数是由这个量和常数组成的解析表达式" 这可以视为**函数概念的第一次扩充**。

函数概念的第二次扩充有一段历史过程。欧拉于 1748 年定义"函数是由手随意画的曲线"，这使得函数概念为适应积分的需要作出了新的推进，当时的几何曲线分为三种，(1) 能用语言或等式来表示曲线的本质而定义的（如圆可用一句话来定义它）叫第一种线；(2) 无法用言词或等式表其本质的，叫第二种线；(3) 用两条以上第一种线所构成的叫第三种线。并认为，只有第一种线能用一个解析式 $y=f(x)$ 或 $F(x, y)=0$ 表示，其他两种都不能。所以当时就把以第一种曲线的解析式 $y=f(x)$，认为是 x 的连续函数或"真函数"，此外的便是"伪函数"。

数学家碰到关于建立函数一般定义的必要性是由弦振动问题的争论而引起的。18 世纪的达兰贝尔与欧拉都先后研究了弦的振动。



图（3-3-1）

问题：如图（3-3-1）紧系在横坐标 $x=0$ 和 $x=l$ 两点的弹性弦具有某个初始的形式，然后没有初始速度地放开，于是弦就开始振动，需

要确定弦在开始振动后任意时刻 t 的形式。这个问题归结为，求函数$u(t,x)$满足$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$初始条件

$$u(0,x)=u_0(x),\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=0。$$

这两位数学家都解决了这个问题，得到相同的解：

$$u(t,x)=\frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2}(0\leqslant x\leqslant t,t\geqslant 0)$$

虽然解的形式一样，但二人理解不同。他们都按自己的方式来理解 $u_0(x)$作为任意函数的意义。

达兰贝尔作为伯努利的信徒，认为“任意函数”意味着“任意解析表达式”，它是一个周期为 $2l$ 的奇函数。而**欧拉**则认为“任意函数”意味着“任意曲线图形”。这两种理解哪个广泛哪个狭窄呢？二人展开了多年的争论，要点如下：

欧拉：任意画的曲线应当是比任意解析表达式更为普遍的概念。须知，所有解析表达式都可以画成为曲线，但不是所有曲线都能有解析表达式。例如，信手画的曲线上可以有尖点，而解析表达的曲线，一般没有尖点。

达兰贝尔：这只是显然的普遍性，但我们说的是关于方程的解而不是说任意的曲线，前面你说的曲线是方程的解，它就必须写成解析表达式。此外它必须是可导的，而带尖点的曲线一般不能是带有偏导数方程的解。对！物理上弹性力在尖点应是无限大，这是荒谬的！

欧拉：曲线可以由某些弧组成，具有不同解析表达式的弧组成的。“考虑这类不服从连续性（解析法）法则的函数，为我们开辟了一个全新的分析领域”（1763 年 12 月 20 日写给达兰贝尔的信）。欧拉在引入连续不可导的函数时，他意识到了自己向前迈进了一大步。

达兰贝尔只接受解析的初始曲线和解析解，他认为不同解析表达式对应的曲线段可以组成解。但当两个弧不能平滑连结时，就

不能成其为解。

年青的数学家丹尼尔·伯努利（约翰·伯努利之子）也参加了这一场争论，他坚持全体可能的初始曲线都可以表达为：

$$u_0(x)=a_1\sin\frac{\pi x}{l}+a_2\sin\frac{2\pi x}{l}+a_3\sin\frac{3\pi x}{l}+\cdots+a_n\sin\frac{n\pi x}{l}+\cdots(*)$$

因为有足够的常数 a_n 使级数适合任一曲线。

达兰贝尔指出：远非所有解析式都能表为（*）的形式。这个 $u_0(x)$是连续且光滑的曲线。如 $\sqrt[3]{\sin x}$就不具备这样的性质。

欧拉也认为，远非所有曲线都能用（*）表示。我画的曲线在每一点可以任意取值，而级数（*）已经不允许任意取值，特别是 $u_0(x)$ 本身是个奇的周期函数，此外两个曲线可以在一段重合而在另一段不同，而（*）式对这样的两条曲线一般说是办不到的。

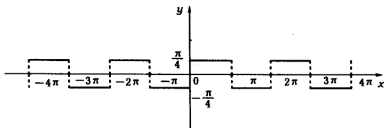
伯努利展开式（*）中有无穷多个系数 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…对于它们如何计算，当然不知道。因此伯努利表达式（*）不能使人相信而为众所公认。

虽然这场争论延续了很久，但终于促成了一个新的函数概念定义的问世。这个定义更加数学化了，这就是 1755 年欧拉的定义："如果某些量这样地依赖于另一些量，当后者改变时它经受变化，那么称前者为后者的函数。"这个定义虽包含了解析式给出的函数，也包含了曲线给出的函数，但并没指出某些量和另一些量依赖关系有何特性。

到 1807 年傅立叶提出了确定（*）式中系数的法则：

$$a_n=\frac{1}{\pi l}\int_{-l}^{l}u_0(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

并且指出，"由不连续曲线给出的函数，可以用一个三角函数式表示"的结论。他举例如图（3-3-2）。



图（3-3-2）

$$y=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & 2k\pi<x<(2k+1)\pi \\ 0 & x=k\pi \\ -\frac{\pi}{4} & (2k+1)\pi<x<2(k+1)\pi\end{cases}\qquad (k\in Z)$$

并证明，这一不连续曲线可以用

$$y=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots$$

表示出来。可见，欧拉关于真函数伪函数的提法是不合理的。这为柯西寻求新的函数定义提供了条件。

函数概念的第三次扩充以柯西定义起始，柯西的定义是："对于 x 的每一个值，如果 y 有完全确定的值与之对应，则 y 叫做 x 的函数"。依这个定义，函数关系用一个或分段用几个解析式表示，甚至不用解析式子表示都可以。不过柯西给的例子却仍考虑的是 x 和 y 的关系以若干个解析式表示的情形。

1797 年 C・拉克鲁瓦给出如下定义："一个量的所有的值依赖于一个或许多其他的量，则称这个量是后面这些自变量的函数。为了由后面的自变量得出第一个量所必须进行的运算可以是已知的也可以是不知道的"。

此后，1834 年 H・И・罗巴切夫斯基也给出一个函数定义："x 的函数是一个数，它是与 x 一起逐渐变化着的。函数的值可以由解析表达式给定，或者由提供从全部的数中选取一个数的条件所给定，依赖关系可以存在但依然是未知的"。

迪里赫勒在 1837 年给出如下函数定义："如果对 x 的所有值都对应着完全确定的 y 值，则称 y 是 x 的函数，至于用怎样的方法建立所指出的对应关系完全不是重要的。"迪里赫勒的定义标志**着函数概念的第四次扩展。**

依迪里赫勒定义

$$D(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ 是有理数})\\ 0 & (x\text{ 是无理数})\end{cases}$$

是一个道地的函数。迪里赫勒还成功地给出了 $D(x)$ 的如下表达式

$$D(x)=\lim_{n\to\infty}[\lim_{m\to\infty}(\cos m!\ \pi x)^{2n}]$$

这个表达式，当 x 为有理数时恒为 1，当 x 为无理数时恒为 0。

迪里赫勒的定义是如此清楚而没有毛病，于是被数学无保留地采用了。实际上，19 世纪数学的发展已经区分出各种函数类：连续函数，可微函数，解析函数，为揭示统一的函数定义奠定了基础。数学分析得到了"函数论"的名称，复变函数与微分方程找到了一般的基础。19 世纪数学家们推想：用迪里赫勒的函数定义，确定了数学分析发展的一般研究领域并且以后将永远如此了！

但到了 19 世纪末，数学家惊奇地发现，迪里赫勒定义的好像不可争辩的清楚与明白，包含有出人意料的原则性的困难。

设每个自然数 $N=1,2,3,\cdots$ 对应着数 $\alpha(N)$

$$\alpha(N)=\begin{cases}1 & (\pi\text{ 的十进小数中存在连续 } N\text{ 个 } 9)\\ 0 & (\pi\text{ 的十进小数中不存在连续 } N\text{ 个 } 9)\end{cases}$$

$\alpha(N)$是不是 N 的函数呢？

按迪里赫勒定义，当然这是函数。对于每个 N 或者在 π 的展开中有连续的 N 个 9 或没有连续 N 个 9。第三种情形不存在，这完全符合函数的定义。

也有人反驳，不能对每个 N，指出 π 的无穷小数中是否存在连续 N 个 9 的法则，这个法则或存在或不存在，但我们不知道，所以不能说 $\alpha(N)$是 N 的函数。

"用怎样的方法给出 x 与 y 之间的对应"，这一点在函数定义中是否重要？在 20 世纪初数学家们有两种观点：一种称为直觉主义，拒绝经典分析的大部分内容并且给出了自己直觉主义的数学；一种坚持经典的函数定义继续前进。

在此期间，**函数概念经历了第五次扩展**，撤消对自变量取值范围的限制。对于函数 $f(x)$ 中的自变量 x，不必取区间 $[a, b]$ 上的所有值，而只取其中的任意一些就可以了，换言之，作为 x，如果允许它取数中的任意集合。那么不管这些数是有限个还是无限个都是允许的。

例如 $y=f(x)=\frac{1}{x!}$（x 取正整数）

这样 x，y 的限制都逐一解除，使函数有了更广泛的品格。

维布伦和林纳的函数定义是**函数概念的第六次扩展**。以往的函数概念中自变量、因变量都限于数。对此，维布伦拓宽了变数概念，他规定：所谓变量是代表某集合中的任意一个"元素"的记号，它可以是数，也可不是数，变量 x 所代表的"元素的集合"叫变量的变域，常量是特殊的变量。它是集合中只包含一个元素情况下的变量。变量与常量的这种定义是维布伦、林纳最早应用于自己的著作之中，他们的函数定义如下："在变量 y 的集合与另一个变量 x 的集合之间，如果存在着对于 x 的每一个值，y 有确定的值与之对应这样的关系，那么，变量 y 叫做变量 x 的函数。"显然，这个定义中，x，y 可以是数，也可以是点，也可以是别的东西，总之是集合中的元素。

在康托于 19 世纪末叶创建集合论的基础上，集合函数的诞生标志**函数概念第七次扩展**。

对于以集合为元素而构成的集合 P 的每一个元素 A，如果在另一个集合的集合 Q 中有完全确定的元素 B 与之对应，那么，集合 Q 叫做集合 P 的集合函数。

不难发现，当集 P、Q 的元素 A、B（A、B 本身也是一个集

合）是由惟一的元素构成时，上述定义与维布伦定义相吻合。如每一个线段对应一个长度，就是一个集合函数。

到此，函数概念所包含的范围已极广泛了。但如果说这种扩展已到尽头尚且为时过早；20 世纪 30 年代 δ—函数的发现就是一个例子。

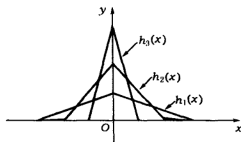
1930 年迪拉克出版了《量子力学原理》，其中引入了 δ—函数：$y=\delta(x)$ 对 $-\infty<x<+\infty$ 的 x 值，除 $x=0$ 外都取值 0，而当 $x=0$ 时，取值 ∞，同时 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$。

关于 δ—函数，勒贝格与迪拉克进行了激烈的争论，其要点如下：

迪拉克：δ— 函数写入数学分析是美好的，比如对经典函数 $\varphi(x)$，当 $x=0$ 时连续，在求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x$ 时，根据连续性，可以认为 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 的小邻域保持自己的值 $\varphi(0)$，这个邻域之外由于 $\delta(x)=0$，因此积分为 0。在这个小邻域中，将 $\varphi(0)$ 提到积分号外，我们得到 $\delta(x)$ 本身积分按约定等于 1。因此 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)$。

勒贝格：δ—函数这样的定义，并引入讨论没有任何意义。除一点外处处为 0 的函数具有积分为 1，对任何积分理论都是不可想象的。

迪拉克：δ— 函数可以作为某个函数序列的极限。例如取一系列函数 $h_1(x)$，$h_2(x)$，…，它是用底在 x 轴上关于 $x=0$ 对称的顶点在 y 轴上的等腰三角形，其面积均为 1 来表达的，当它的高无限增加时，很清楚，$\lim\limits_{n\to\infty}h_n(x)=1$（当 $x>$



图（3-3-3）

0 或 $x<0$ 时)，当 $x=0$ 时，取值 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n(x)=\infty$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\lim\limits_{n\to\infty}h_n(x)\mathrm{d}x$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h_n(x)\mathrm{d}x=\lim 1=1$。这意味着，函数列 $\{h_n(x)\}$ 的极限是 δ— 函数，如图(3-3-3)。

勒贝格：这个论证含有错误，一般说，不能改变极限与积分记号的次序。我的一般理论指出，只有在确定条件下才能交换二者次序，但这种条件对此例不成立。

迪拉克：还可用另外途径得到 δ—函数。取函数 $\theta(x)$，当 $x<0$ 时等于 0，当 $x\geqslant 0$ 时等于 1。研究它的导数 $\theta'(x)$，很清楚 $\theta'(x)$ 在 $x<0$，$x>0$ 时都等于 0，当 $x=0$ 时等于∞，而 $\theta'(x)$的积分即得出它的原函数，也就是 $\theta(x)$本身等于 1。因此 $\theta(x)$的导函数 $\theta'(x)$ 是一个 δ—函数。

勒贝格：讨论中有新的错误。任意函数的导数可能存在也可能不存在。这不是对整体而言，只是在每个个别的点。$\theta'(x)$实际当 $x>0$，$x<0$ 时存在且等于 0，这时你是对的，但当 $x=0$ 时它不存在，这从哥西时候就已经知道了，在每一点可导的函数在这点必是连续的，而 $\theta(x)$ 当 $x=0$ 时间断。导数、积分理论之推广，首先得对每一点的导数存在时才是正确的。

迪拉克：但 δ—函数给出了在物理学中富有成效的结果。没有它我不能解决量子力学中最简单的问题——关于氢原子能级问题。而我借助 δ—函数找到了的理论结果得到了实验的证实。

勒贝格：我尊重物理学，我不能采取这样类型的证据，它是在数学之外的，在数学中 δ—函数不存在。数学中不能接受有 δ—函数参加的问题的理论工作。

由于 δ—函数等奇异函数在物理学中的应用，引起了拓广古典函数的要求，建立的新函数定义要具有下列性质：

(1) 古典分析中的函数仍然是在新的意义下的函数。

(2) δ—函数以及物理学中的奇异函数都属于新的函数类。

(3) 所有的新的函数都具有导函数，导函数同样是新意义下

的函数。

（4）新函数的收敛级数可以逐项微分，导数的级数永远等于原级数的和的导数。

前苏联数学家 С. Л. Соболев（索伯列夫）对此做了大量的工作，给出了满足上面列举的条件的对象族，以后都被他称之为“广义函数”。几十年来，广义函数论得到了广泛的发展并在数学分析和许多其他数学领域成为不可缺少的了，同时对于一系列物理问题的研究也是必不可少的工具。

函数概念的发展扩充长达 200 年之久，最后的形式并不意味着函数发展史的终结。毫无疑问，今后在数学本身要求的影响下，或其他科学——物理学、生物学，也可能是社会科学的影响下，函数概念还将演进与扩充，每一次变化都可能达到新的科学水平和导致新的科学发现。

思考题

1. 函数概念的两个要素是什么？试从函数的内部矛盾进行分析。

2. 简述马克思如何从不定方程求解来分析函数的由来。试叙述函数概念演进过程中的主要阶段。

第四节　数学概念间的普遍联系

前几节，我们考察了几个数学概念历史发展中的联系，是纵向联系，此外数学概念之间有着更广泛的横向联系。正如大数学家希尔伯特所说：“我认为，数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正在于各个部分之间的联系，尽管数学知识千差万别，我们仍然清楚地意识到：在作为整体的数学中，使用着相同的逻辑工具，存在着概念的亲缘关系，同时在它的不同部分之间也有大量的相似之处。”这种为数学家的经验所捕捉到的“亲缘关系”

和“相似之处”，无疑是数学概念中的一种重要的联系。善于发现这种联系有着重要的方法论价值。

一、一个彻底辩证的方法

在数学研究中要捕捉“亲缘关系”和“相似之处”这是数学家的经验之谈。恩格斯作为马克思主义创始人之一，则通过三角学从综合几何发展出来的事实，进行过深刻的分析。认为这为辩证法提供了很好的例证，并指出这种从事物的互相联系中理解事物，是一个彻底辩证的方法。

综合几何只就三角形，圆的性质分别开来孤立的研究。这当然是必要的然而又是有很大局限性的。当综合几何的研究已经觉得没有什么可说的时候，把三角形与圆联系起来考察，把三角形作为圆的附属物，就发展出一种崭新的三角理论。

由于把三角形附属于圆，三角形的边和角便得到了完全不同的、特定的关系：

三角形的内角→圆心角。

三角形的边→和圆有关的线段，如弦心距、弦、切线段等。

这样，建立联系之前与建立联系之后大不一样。为进一步拓广三角函数开辟了道路，不妨做如表（3-4-1）所列的对照。

有了三角函数，反过来对三角形的研究方法也有了新发展，过去三角形边与角之间只有定性的关系，现在可以定量地通过角来计算边，通过边来计算角，通过弧来计算弦等。

这种普遍联系的思想非常重要，恩格斯称之为是“一个非常简单的、彻底辩证的方法”。[1] 说它对辩证法是一个很好的例证，说明辩证法怎样从事物的相互联系中理解事物，而不是孤立地理解事物。这是因为，把事物看成孤立、静止的是一种片面性，它局限人们去深入地认识事物。但是，一当我们从事物的运动、变

〔1〕 恩格斯：《自然辩证法》人民出版社，1971 年版，第 242 页。

表（3-4-1）

联系前 （直角三角形中）	联系后（三角形作为单位 圆的附属物）
1）角 α 是锐角	1）α 可以拓广为任意角（正、负）
2）体现边角关系的六个三角函数都表现为对应边之比，永为正值 $\sin\alpha=\frac{AB}{AC}$，$\cos\alpha=\frac{BC}{AC}$ $tg\alpha=\frac{AB}{BC}$，$ctg\alpha=\frac{BC}{AB}$ $\sec\alpha=\frac{AC}{BC}$，$cosec\alpha=\frac{AC}{AB}$	2）六个三角函数都表现为有向线段，其数量有正有负 $\sin\alpha=BA$　$\cos\alpha=OB$ $tg\alpha=ED$　$ctg\alpha=FG$ $\sec\alpha=OD$　$cosec\alpha=OG$
3）边角关系表现为抽象的“数”。这不利于研究三角函数之间的关系和三角函数值的变化	3）边角关系表现为具体的“形”（有向线段），利于通过单位圆来研究三角函数之间的关系和三角函数值的变化
4）三角函数的性态（奇偶性、周期性、增减性、有界性、极值）表现的不完整、不明显	4）对三角函数的性态可以作具体的完整的分析和研究

化、生命和相互作用方面去考察事物时，情形就完全不同了。辩证法一旦进入了数学，就使数学从狭隘领域中开拓出广阔的新天

地，辩证法进入数学的重要表现之一，就是不再孤立地去考察一个概念、一个分支，而要善于把两个概念、两个分支联系起来进行考察研究，往往能获取新的成果，开辟出新的领域。用普遍联系的观点看问题的方法，不但在数学研究与教学中行之有效，在整个自然科学研究中也极为重要，许多边缘学科和分支的产生有力地证明了这一点。

二、数学概念联系例谈

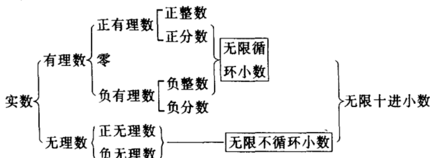
数学概念之间，存在着多种多样的联系。这种联系在数学上往往借助某种关系来表达。

1. 以从属关系为桥梁的联系

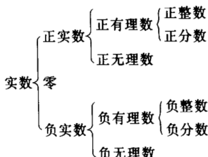
一个数学分支，恰似一个庞大的“家族”，它的许多概念，好比这个大家族的成员，都具有一定的“亲缘关系”，都是以一定的从属关系为桥梁互相联系着。为什么某些数学概念之间的联系不能一下就看清楚呢?这正像一个大家族中远支的祖孙叔侄一样，只有把他们的谱系搞清楚，才能明确每个成员在整个家族中的位置。从而也就弄清了他们中任何两者之间的关系。分类讨论的树形分支图或谱系表常是帮我们弄清概念之间联系的工具。

例 1. 实数集中各类数概念间的从属关系。

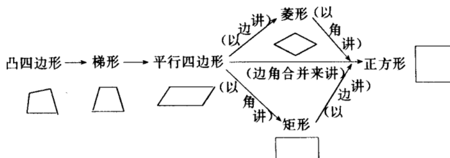
其一：



其二：



例 2. 各种四边形间的从属关系。



例 3. 三角形和圆台是否有联系？平行四边形与锥有无联系？

表面看，好像它们之间没什么联系。但从求积公式来分析，则能把这多种多样的形体统一起来。这表明它们之间应有重要的内在联系的根据。我们先看这些形体求积公式的统一性。然后再考察它们之间的联系。

平行四边形面积公式，对于计算矩形、正方形面积都适合，梯形面积公式，对于计算平行四边形面积、三角形面积也都适合。

柱体的体积公式，对于计算正方体、长方体体积都适合。台体的体积公式，对于计算柱体、锥体体积也都适合。因此，梯形面积公式，台体体积公式比较具有一般性。

比较梯形面积与台体体积公式（台体截面是梯形）又具有更一般性的东西。

$$梯形面积\ S=\frac{1}{2}(上底+下底)\times 高=中位线\times 高$$

$$=\frac{1}{6}(6\times 中位线)\times 高$$

$$=\frac{1}{6}(\text{上底}+4\times\text{中位线}+\text{下底})\times\text{高}$$

台体体积 $V=\frac{1}{6}(\text{上底面积}+4\times\text{中截面积}+\text{下底面积})\times\text{高}$

统一起来：

$$J=\frac{1}{6}\ [\text{上}+4\times\text{中}+\text{下}]\ \times\text{高}$$

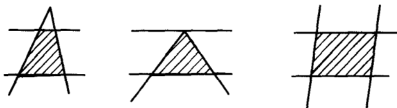
当然更为一般的形体可以用牛顿—莱布尼茨公式解决

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a),\text{其中 } f(x) = F'(x)。$$

上面这种求积公式中的共性，反映了这些形体之间的亲缘关系。

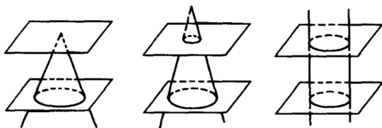
正方形、矩形都是特殊的平行四边形。平行四边形和三角形都可看作梯形的特殊情况。以上的从属关系较为明显。但也有的形体之间的关系不那么明显。因此要理解这些形体求积公式层层概括、逐次扩展的实质，就应该对这些形体及其求积公式做认真的剖析。着重分析其共性，研究其特征，把握其从属，从而发现它们之间的本质的内在联系。

首先，根据运动、变化的观点，看多种多样的几何形体在结构方面的共性。前面提到的平面图形，都可以看作是用两条平行线去截一个角的两边所得的图形（夹在平行线间的部分）这种图形不妨称为“截角形”，如图（3-4-1）。当角的顶点在有限位置时，适当截之可得三角形和梯形，当角的顶点在无限远处，“角”的两边平行，可截得平行四边形、矩形、正方形。



图（3-4-1）

前述立体图形，都可以看作是用两张平行平面去截一个锥面所得的体（夹在平行平面间的部分）这种体我们不妨称之为“截锥体”，如图（3-4-2）。当锥面的顶点在有限位置时，可截得锥体或台体。当锥面顶点在无穷远处，锥面变为柱面，可截得正方体、长方体和柱体。



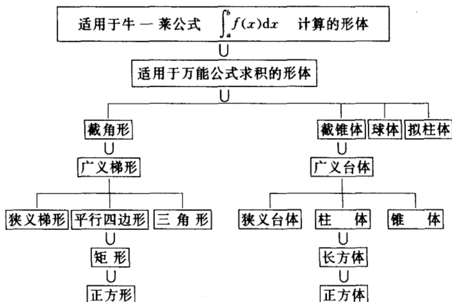
图（3-4-2）

因此，前述各种形体，从结构上看，都具有这种“截”的共同点。因而它们的求积公式也应具有一定的共性。

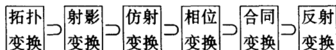
其次，从解析式入手定量分析，研究被积函数的基本特征。

前述各种形体，还可包括圆、球、拟柱体，如果把它们放在坐标系中的适当位置。并把横截线，横截面看作高 x 的函数$f(x)$，用定积分方法来计算面积或体积，这时被积函数 $f(x)$都是 x 的不超过 2 次的多项式。在这种条件下，可以证明，“万能”求积公式和牛—莱公式是等效的。（被积函数高于 2 次，结果就不同了）

上述形体间的亲缘关系，可列表如下。



例 4. 平面上各种几何变换，有从属关系为桥梁的联系如下：



2. 以合成关系为纽带的联系

合成关系在数学理论中相当普遍，是一种重要的概念间的联系形式。

例 1. 几何变换之间的合成关系。

如任何相似变换都可由位似变换与合同变换所合成，任何合同变换都可以由不多于三次的反射（轴对称）变换来合成。

例 2. 数理逻辑中命题演算的合成关系。

数理逻辑中进行命题演算，通常使用否定、合取、析取、蕴涵、等值五个联结词，这五个联结词定义如表（3-4-2)。

否定

α	$\bar{\alpha}$
1	0
0	1

表（3-4-2）

		合　取	析　取	蕴　涵	等　值
α	β	$\alpha\wedge\beta$	$\alpha\vee\beta$	$\alpha\longrightarrow\beta$	$\alpha\longleftrightarrow\beta$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

问题是运用这些联结词可否构成一切逻辑函数呢？这在数理逻辑中叫做这组联结词是否具有完全性的问题。人们早已证明，这组联结词是具有完全性的。现在的问题是：去掉其中某些联结词，是否还能具有完全性呢？可以证明：否定与合取、否定与析取、否定与蕴涵，这每一对联结词都具有完全性，也就是用这每一对逻辑联结词，都可以构成任意的逻辑函数。前面曾经指出用五个联结词是可以构成任意的逻辑函数的。因此，为了证明这三对中的每一对联结词具有完全性的问题，只要证明它们能构成其余的三个联结词就可以了。例如我们用“否定”、“析取”两个联结词，就可以构成其他的联结词。事实上，

① $\bar{\alpha}\vee\beta=\alpha\rightarrow\beta$

② $\overline{\bar{\alpha}\vee\bar{\beta}}=\alpha\wedge\beta$

③ $\overline{\alpha\vee\beta}\vee\overline{\bar{\alpha}\vee\bar{\beta}}=\alpha\longleftrightarrow\beta$。

我们不妨验证如表

表（3-4-3）

①

α	$\bar{\alpha}$	β	$\alpha\rightarrow\beta$	$\bar{\alpha}\vee\beta$
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1

∴ $\bar{\alpha}\vee\beta=\alpha\rightarrow\beta$

表（3-4-4）

②

α	β	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\alpha}\vee\bar{\beta}$	$\overline{\bar{\alpha}\vee\bar{\beta}}$	$\alpha\wedge\beta$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

$\therefore\quad \overline{\bar{\alpha}\vee\bar{\beta}}=\alpha\wedge\beta$

表（3-4-5）

③

α	β	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\alpha\vee\beta$	$\overline{\alpha\vee\beta}$	$\bar{\alpha}\vee\bar{\beta}$	$\overline{\bar{\alpha}\vee\bar{\beta}}$	$\overline{(\alpha\vee\beta)}\vee\overline{(\bar{\alpha}\vee\bar{\beta})}$	$\alpha\longleftrightarrow\beta$
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

$\therefore\quad \overline{(\alpha\vee\beta)}\vee\overline{(\bar{\alpha}\vee\bar{\beta})}=\alpha\longleftrightarrow\beta$

研究这种完全性不仅有重要的理论意义，而且有重要的实践意义。例如，在研制一个自动装置系统的逻辑元件时，至少要制造多少种逻辑元件才能够用呢？这个问题，在数学上就恰恰是上述的完全性问题。因而也就归结为一个研究合成关系的课题。合成关系在许多数学分支中都有相应的课题。在数学概念研究中，普遍联系的观点是十分重要的。

3. *以对应关系为媒介的联系*

数学中的映射、函数的概念，是刻画对应关系的重要概念。数学中的同构是一种重要的以对应关系为媒介的联系。

例 1. 数与形概念的联系与解析几何。

数与形是两个不同的数学概念，它们各有自己确定的含义。但是它们之间又存在着本质的联系，并且在一定意义下，可以把它

们看成等同的东西。

解析几何的基本思想是数与形相结合，这种联系是通过坐标法建立起来的：几何问题代数化，图形性质坐标化。

在平面直角坐标系中，点的位置由实数对来确定，曲线是动点运动的轨迹。动点的坐标是一对变量，这一对变量间的相依关系，反映了曲线的几何特性。这样，我们用坐标法就把曲线和方程联系并统一起来了。这时，研究形的问题就转化为数量关系的计算，数量关系计算的结果却反映并表现为图形的性质，具有某种性质的点组成的曲线联系着符合某种条件的坐标满足的方程。几何性质的研究转化为对数量关系的讨论。几何问题与代数问题的对应是一一对应，可以建立一部“互译辞典”，如表（3-4-6）：

表（3-4-6）

平面几何问题	代数问题
一点 P	$P(x, y)$
曲线 l	$F(x, y)=0$
点 P_0 在曲线 l 上	$F(x_0, y_0)=0$
点 P_0 不在曲线 l 上	$F(x_0, y_0)\neq 0$
$l_1\cap l_2=\{P\}$	$\begin{cases}f_1(x, y)=0\\f_2(x, y)=0\end{cases}$ 有解
$l_1\cap l_2=\varnothing$	$\begin{cases}f_1(x, y)=0\\f_2(x, y)=0\end{cases}$ 无解
直线 l	$Ax+By+C=0$
直线方向	斜率 k $(y=kx+b)$
点到直线距离	$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
点 P_1，P_2 的距离	$\lvert P_1P_2\rvert=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
M 是 P_1P_2 中点	$M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

（续表）

$\frac{P_1M}{MP_2}=\lambda$ 　P_1 ——M—— P_2	$M\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$ 　$(\lambda\neq-1)$
$l_1 /\!/ l_2$	$k_1=k_2$ 或 k_1 与 k_2 都不存在
$l_1\perp l_2$	$k_1k_2=-1$
$\triangle ABC$ 面积	$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\1 & x_2 & y_2\\1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}$ 的绝对值
A、B、C 三点共线	$\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\1 & x_2 & y_2\\1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}=0$
圆	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$
椭圆	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
双曲线	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
抛物线	$y^2=2px$
$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$ 四点共圆	$\begin{vmatrix}x_1^2+y_1^2, & x_1, & y_1, & 1\\x_2^2+y_2^2, & x_2, & y_2, & 1\\x_3^2+y_3^2, & x_3, & y_3, & 1\\x_4^2+y_4^2, & x_4, & y_4, & 1\end{vmatrix}=0$
……	……

掌握这一部数、形互译辞典就掌握了解析几何的实质。

数形结合有着重要的意义与作用：

首先，对几何图形性质的讨论更广泛、更深入了，研究的对象也更广泛，方法更一般化了。

其次，为代数课题提供了几何直观。由于代数借用了几何的术语，运用了与几何的类比而获得新的生命力。如线性代数正是借用几何学中的空间、线性等概念与类比的方法把自己充实起来

而迅速发展的。代数方法便于精细计算，几何图形直观形象，数形结合，互相促进使我们加深了对数量关系与空间形式的认识。正如拉格朗日所说："只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄，但是当这两门科学结合成伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力，从那以后，就以快速的步伐走向完善"。[1]并为创建微积分准备了数学工具。

最后，数形结合从方法论方面也给人们以重要的启示。由平面上把点、曲线与数对、方程建立一一对应的思考方法，启发数学家把一个个函数视为"点"，而把某类函数的全体视作"空间"，由此形成分析类数学中泛函分析这一活跃的分支。

例 2. 数学中的布尔代数，集合运算，命题演算以及概率中的事件运算，它们虽各属不同的数学分支，但是它们之间却存在着非常和谐的对应关系，如表（3-4-7）所示。

表（3-4-7）

学　科	对　应　内　容			
布尔代数	1	0	+	·
集合运算	包含	不包含	并	交
命题演算	真（1）	假（0）	析取	合取
事件运算	出现	不出现	或	与

不仅如此，这些概念和开关电路，电子线路的有关概念之间，也存在类似的对应关系。正因为如此，布尔代数的理论才能在电子计算机的研究、设计、使用中发挥巨大的作用。

数学概念和其他学科之间广泛存在的对应关系，正是数学之所以能够在其他学科中应用的重要前提。这种以对应关系为媒介的联系，是数学研究与应用的有效手段之一。

4. 以对偶原理为基础的联系

〔1〕 M·克莱因：《古今数学思想》（第二册），上海科学技术出版社，1979 年版，第 24 页。

对偶原理为基础的联系，首先发现于射影几何。

例 1. 平面上的对偶原理

点与直线是完全不同的两个概念，但在射影几何里，由于引入了“非固有元素”，即无限远点，无限远直线等等，使点与直线在结合关系上（即点在直线上，直线通过点等）处于完全相同的地位。如表（3-4-8）：

表（3-4-8）

点几何学	线几何学
1. 二点决定一条直线	1. 二直线决定一点
2. 三点共线	2. 三线共点
3. 含点坐标(x,y)的一次方程 $Ax+By+C=0$ 表示一条直线，其坐标为 $u=\frac{A}{C},v=\frac{B}{C}$	3. 含直线坐标(u,v)的一次方程 $Au+Bv+C=0$ 表示一个点，其坐标为 $x=\frac{A}{C},y=\frac{B}{C}$
4. 原点的坐标是 $x=0,y=0$	4. 无限远直线的坐标是 $u=0,v=0$
5. 过原点的直线方程是 $Ax+By=0$	5. 在无限远直线上的点的方程是 $Au+Bv=0$
6. 二点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$所决定的直线方程是 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$	6. 二线$(u_1,v_1),(u_2,v_2)$所决定的点方程是 $\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix}=0$
7. 三点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$共线的条件是 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$	7. 三线$(u_1,v_1),(u_2,v_2),(u_3,v_3)$共点的条件是 $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}=0$

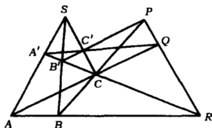
（续表）

点几何学	线几何学
8. 由三线的方程 $L_i=A_ix+B_iy+C_i=0(i=1,2,3)$ 推得它们共点的条件是 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0$	8. 由三点的方程 $P_i=A_iu+B_iv+C_i=0(i=1,2,3)$ 推得它们共线的条件是 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0$
9. 三点以及它们的三条连线组成一个三点形	9. 三线以及它们的三个交点组成一个三线形

经过严格证明可以确定平面上关于点与直线的对偶原理：有关点与直线位置关系的定理，只要把其中的名词与关系词互换一下就得到另一个定理，称为前者的对偶定理，前者的真实性肯定了后者的真实性。这就是射影几何中的对偶原理。

如图（3-4-3）所示，笛沙格定理与它的对偶定理：

笛沙格定理	它的对偶定理
在平面上两个**三点形**对应**顶点**之**连线**交于**一点**时，那么，对应**边**的交点在**同一直线**上。	两个**三线形**对应**边**之**交点**在**同一直线上**时，那么，对应**顶点**的**连线**交于**一点**。



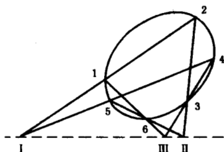
图（3-4-3）

图（3-4-4）是帕斯卡与它的对偶定理图（3-4-5）中的布利安香定理。

帕斯卡（Pascal）定理

（16岁时发现，1640年发表）

在平面上和圆锥曲线相接的六点形的三对相对的**边**交点共**线**，如图（3-4-4）

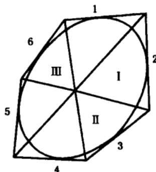


图（3-4-4）

对偶定理：布利安香（Brianchon）定理

（1806年发表）

在平面上和圆锥曲线相切的六**边**形相对**顶点**联线共**点**，如图(3-4-5)



图（3-4-5）

对偶原理除在射影几何外，在数理逻辑中也有重要作用。

例2. 数理逻辑中合取（∧）与析取（∨）两个逻辑联结词以及真、假值（不含蕴涵与等值）的一些公式都具对偶性。

（1）交换律　$\alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha$，$\alpha\vee\beta=\beta\vee\alpha$.

（2）结合律　$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$，

$(\alpha\vee\beta)\vee\gamma=\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$.

（3）分配律　$\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)=(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$，

$\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)=(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)$.

（4）否定律　$\overline{\alpha\wedge\beta}=\bar{\alpha}\vee\bar{\beta}$，$\overline{\alpha\vee\beta}=\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta}$.

（5）幂等律　$\alpha\wedge\alpha=\alpha$，$\alpha\vee\alpha=\alpha$.

（6）吸收律　$1\wedge\alpha=\alpha$，$0\vee\alpha=\alpha$.

$0\wedge\alpha=0$，$1\vee\alpha=1$.

（7）互否律　$\alpha\wedge\alpha=0$，$\alpha\vee\bar{\alpha}=1$.

从公式中可以看出，在一个不含蕴涵与等值联结词的公式中，合取、析取、1，0分别用析取、合取、0，1代换，则得到成对出现的另一个公式。因此，我们可以说合取、析取（同时顾及真与假）两个具体含义不同的逻辑联结词具有完全相同的交换、结合、

分配等等抽象的规律，所以在合取与析取之间，适用对偶原理。若证得一个关于由命题变元和 $\wedge$，$\vee$，$\overline{\quad}$，1，0 及=、（　）组成的逻辑公式，那么把 $\wedge$，$\vee$ 互换，1 与 0 互换后，所得的逻辑公式仍然成立。

如 $(\alpha\wedge\beta)\vee(\bar{\alpha}\vee\bar{\beta})=1$（永真），根据对偶原理，有 $(\alpha\vee\beta)\wedge(\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta})=0$（永假）。

对偶原理在其他数学分支中也有应用。如在某些“格”的理论中，也建立了对偶原理。一个数学分支中一旦建立了对偶原理，此时，当确立一个定理之后，立即可得出其对偶定理的正确性，起到事半功倍之效。

三、普遍联系观点与数学学习研究

在数学学习研究中，注意概念、定理、内容之间的联系非常重要。在数学研究中，发现联系，往往导致数学上的新发现、新方法，新突破。

古典微积分，当建立了牛顿—莱布尼茨公式，找到了微分概念与积分概念之间的联系，从而为微积分学奠定了基础。

在同余式理论中，对模 m 的剩余类共有 m 个，不妨设为是 k_0，k_1，k_2，…，k_{m-1}。

另一方面，1 的 m 次根也有 m 个。

$$\sqrt[m]{1}=\cos\frac{2\pi r}{m}+i\sin\frac{2\pi r}{m}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

于是得

$$w_0=\cos\frac{2\pi\cdot 0}{m}+i\sin\frac{2\pi\cdot 0}{m}=e^{2\pi i\cdot\frac{0}{m}}$$

$$w_1=\cos\frac{2\pi\cdot 1}{m}+i\sin\frac{2\pi\cdot 1}{m}=e^{2\pi i\cdot\frac{1}{m}}$$

$$w_2=\cos\frac{2\pi\cdot 2}{m}+i\sin\frac{2\pi\cdot 2}{m}=e^{2\pi i\cdot\frac{2}{m}}$$

……

$$w_{m-1}=\cos\frac{2\pi\ (m-1)}{m}+i\sin\frac{2\pi\ (m-1)}{m}=e^{2\pi i\cdot\frac{m-1}{m}}$$

这样，可以建立 $\{k_0, k_1, \cdots, k_{m-1}\}$ 与 $\{w_0, w_1, \cdots, w_{m-1}\}$ 之间的一一对应。

$$k_i \longleftrightarrow w_i \quad (i=0, 1, 2, \cdots, m-1)$$

这就是近代数论中一个很重要的方法三角和方法的思想来源之一。

发现概念之间的联系，往往是在对学科比较了解的情况下，学习数学一是学习基础；第二步是学习某一分支的基础；第三步要了解这个分支的历史。从一个分支的历史中运用联系的观点，往往可以找到突破进取的方向。比如，我国数学家杨乐、张广厚在函数值分布论的研究中，将前人提出的亏值与奇异方向两个概念联系起来考察而取得了突破。

在数学学习与教学中，普遍联系的观点可以帮助教师找到教学内容中的内在联系，也可帮助学生找到知识的内在联系。比如二次三项式、一元二次方程、二次函数、一元二次不等式，就是一个有机联系的“知识链”。二次三项式因式分解联系着一元二次方程求根，一元二次方程的根正是二次函数的零点，零点分二次函数定义域所成区间中联系着一元二次不等式的解区间。

将普遍联系的观点运用到数学的学习、教学研究工作中是非常重要的。

思考题

1. 举例说明数学概念之间的联系（从教材中分析的四种联系去考虑）。

2. 试用列表或树形图建立三角函数中加法定理公式之间的联系。

第四章

数学运算的相互转化

现实世界中种类繁多、形式各异的数量关系并非各自孤立彼此无关的，而是错综复杂地联系着。数量之间的各种运算，就是数量之间的一种联系，各种数学运算之间也存在着联系。

第一节　四则运算间形式的转变

著名的法国布尔巴基学派在发表自己的著作时曾说过："研究代数，本质上意味着计算，也就是对某个集合的元素进行'代数运算'。最著名的例子是初等算术中的四则运算"。

数是客观世界各种事物在质的规定性基础上的量的规定性的具体表现。数是运算的实体，运算是数的作用，简言之，"数是算之体，算是数之用"。运算反映了数之间的内在关系，内在规律，数与算是密不可分的。

我们回顾四则运算的发展过程：

一、高级运算是从低级运算分化出来的

众所周知，数起源于“数”(shǔ)。其实，在“数”的过程中，就已经包含着两个意义相反的动作：一个是综合，相反的一个是分离。综合是一个一个地积累，分离是一个一个地除去。可见，“数”的过程中，就已经包含着某种原始算法的萌芽：综合是一个一个的增加，其特点是“进一”，不妨称为“一进法”，分离是一个一个的退去，其特点是“退一”，不妨称为“一退法”。“一进法”“一退法”是伴随计数而产生的最原始的运算，可称之为“**0级运算**”。

在多次反复运用“一进法”和“一退法”进行积累与分离的过程中，逐渐分化出加法与减法。把每次积累一个或分离一个变为积累一批或分离一批，从积累、分离的对象来看，存在着“以多当一”这种辩证关系，这样由“一进法”发展出加法，由“一退法”发展出减法，加法与减法通称为**一级运算**。正如反映累积与分离过程的“一进法”与“一退法”的关系一样，加法与减法也是互逆的运算。

在加法中，一般加数是相互不同的。但如果加数彼此相同，则分化出一种简捷的算法——乘法。

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{个}}=na$$

也就是说，乘法是由加法分化出来的。

在减法中，一般情况下，由一个数减去若干个数，每个减数彼此可以互不相同，但如果累减中减数彼此相等时，则分化出一种简捷算法——除法。

比如18个东西，每次拿掉3个，拿多少次才拿光呢？

$$18-\underbrace{3-3-3-3-3-3}_{6\text{次}}=0$$

记为 $18\div3=6$

这样，就由加、减法分化产生了**二级运算**——乘法与除法。乘法与除法也是互逆的运算。

同样，在乘法中，乘数彼此可以不同。但如果乘数彼此相同时，则分化出一种新的运算——乘法在乘数相同时的简捷算法，乘方（或幂）。

$$\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n个}=a^n$$

在除法中，当进行连除时，除数一般可以不相同。但若除数相同时进行连除法，且经过 m 次后恰其商为 1，问除数应为何值？

这样分化出一种新的运算——开方，即

若　$A\div\underbrace{a\div a\div a\div\cdots\div a}_{m次}=1$，则简记为 $\sqrt[m]{A}=a$

则　$64\div\underbrace{4\div4\div4}_{3次}=1$ 则 $\sqrt[3]{64}=4$

乘方与开方称为**三级运算**。

四级运算的顺序发展综合如表（4-1-1）。

表（4-1-1）

0 级运算	一级运算	二级运算	三级运算
一进法	加法 $a+(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{b个})=a+b$	乘法 $\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n个}=na$	乘方 $\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m个}=a^m$
一退法	减法 $a-1\underbrace{-1-\cdots-1}_{b个}=a-b$	除法 $a-b\underbrace{-b-\cdots-b}_{n个}=0$ 则 $a\div b=n$	开方 $A\div a\underbrace{\div a\div\cdots\div a}_{m个}=1$ 则 $\sqrt[m]{A}=a$

以上是四则运算由低级向高级的纵向联系。

二、同级运算在一定条件下相互转化，在发展中界限逐渐消失

同级运算：加与减，乘与除，乘方与开方两两互为逆运算，在一定条件下，彼此的界限在发展中消失。

加与减，在算术中是相互补充、相互为用，如

$998+326=(998+2)+(326-2)=1000+324=1324$。

在代数中，引入负数的条件下，由于任何数都存在惟一的相反数，因此减法可以转化为加法，反过来加法也可以转化为减法。

$$a-b=a+(-b) \quad a+b=a-(-b)$$

这表明加与减之间的差异性中包含着同一性，加法与减法在引入负数的条件下，以代数和的形式统一起来了。作为代数和，你分不出是加还是减，加与减之间固定不变的界限在发展中融合了，消失了。代数和是代数学中一个十分重要的概念，在代数和概念的基础上，有理整式（多项式）就被表为单项式的代数和，移项法则仅着眼于系数的性质符号："移加变减，移减变加"，加、减号与正、负号的作用，运算符号与性质符号合而为一。一元二次方程的一般形式可以写成 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的统一形式，总之不再区分加、减、正、负了。

在引入倒数（分数）的条件下，乘法可以转化为除法，$a\times b=a\div\left(\frac{1}{b}\right)$，除法也可以转化为乘法，$a\div b=a\times\frac{1}{b}$。有理数本身就是"有比数"，$\frac{m}{n}$即可看成 m 除以 n，也可以看作 m 乘以$\frac{1}{n}$，$\frac{m}{n}$这个形式本身就是乘与除的统一体。这样一来，乘法与除法之间绝对分明的差异也在发展中消失了。

在指数概念扩充以后，乘方转化为开方，开方转化为乘方，一个数的方根可以写成它的幂。如 $\sqrt{A}=A^{\frac{1}{2}}$。反之，一个数的幂也可以写成它的方根，方根与乘幂这两个对立的运算界限也消失了，简直成了一个东西。

比如 $$\frac{1}{\sqrt[1000]{2}}=2^{-\frac{1}{1000}}$$

在代数式的运算当中，我们不正是反复地运用加与减、乘与除，乘方与开方在一定条件下互相转化来演出一场场精彩的活剧的吗！

由这三对互逆运算横向之联系，使我们看到，在一定条件下“计算方法的一切固定差别都消失了，一切都可以用相反的形式表示出来”。[1]

四则运算的纵向、横向的联系向我们表明：“辩证法不知道什么绝对分明的和固定不变的界限，不知道什么无条件的普遍有效的‘非此即彼！’它使固定的形而上学的差异互相过渡，除了‘非此即彼！’，又在适当的地方承认‘亦此亦彼！’并且使对立互为中介；辩证法是惟一的、最高度地适合于自然观的这一发展阶段的思维方法”。[2]

三、第三级运算转化为第一级运算——发展的螺旋形式

第三级运算是由第二级运算直接得来；第二级运算又是由第一级运算发展的结晶；第三级运算可以转化为第一级运算来进行。这反映了发展过程的螺旋形式。

第一级运算是加法 $a+b$，第二级运算乘法是对第一级运算的否定，是一个发展，其结果是 $a\times b$。第三级运算对第二级运算又是一次否定，而对第一级运算，就是通常所说的经历了一个否定之否定。由于第三级运算与第一级运算的亲缘关系，在第三级运算中总会重复着低级阶段的某些特征、特性，仿佛是向第一级运算的复归。只要注意到第三级运算中

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

同底数幂的乘除变为幂指数的加减。这正是发展螺旋形式的一个极好的例证。

为了普及四则运算的发展联系的常识，数学所孙克定研究员曾写出歌诀如下：

物质世界大集合，

〔1〕 恩格斯：《自然辩证法》人民出版社，1971 年版，第 235 页。
〔2〕 恩格斯：《自然辩证法》人民出版社，1971 年版，第 190 页。

客观数量一与多，
原始数为一，
原始算进一。
一一计数称进法，
进法产生自然数，
进法逆转成退法，
退法生 0 及负数。
进法累计成加法，
退法累计成减法，
同数连加是乘法，
连减同数是除法。
同数连乘是幂法（乘方）
连除同数是根法（开方）
零、一、二、三、四级算，
总计八则算法全。
八则四正又四逆，
逆算不断生新数，
除法产生分、小数，
根法生根及复数。
新数又可代逆算（以乘代除，以正代负），
灵活运用更简便，
辩证关系此最明，
无算无逆不能办。

第二节　运算概念的辩证发展

随着运算对象的抽象，运算也日益更加抽象，经历算术四则运算→代数运算→一般运算的发展过程。

一、数的四则运算

在算术中的四则运算是对具体的数进行的运算。尽管每对具体数的运算形式，结果都不尽相同，但内中蕴含着某种规律性，数的运算满足一定的运算律，如加法、乘法的交换律、结合律，乘法对加法的分配律等等，这也就是通常所说的“数系通性”。此后，从算术过渡到代数，在代数学中已经不再就个别的数的运算来研究，而是以字母代表数，对一般的数、抽象的数的运算进行研究。字母表示数不仅可以很方便地表达具有普遍意义的运算律，而且可以用运算符号表达数之间的关系结构，也便于把字母表示的运算从数推广到其他各种量的运算，字母的式子同样可以表达量的关系与结构。因此，字母表示法的实质就是舍去运算对象的个性，而把运算对象抽象化。

随着运算对象的抽象化，人们对什么是运算开始有了更一般的思索，原来不只数可运算，向量也可运算，行列式，矩阵均可运算。那么到底什么是运算呢？我们还是从具体例子分析起：

如　$12+3=15$，$12\times3=36$，$12-3=9$

$3+12=15$，　$3\times12=36$，　$3-12=-9$

可以看出，两个数通过运算得到一个新的数，这种运算是在一个数集中进行的。即两个运算对象及运算结果都要属于这个数集，参与运算的两个数是与次序有关的。与次序有关的两个数 a，b 组成一对，称为有序数对，记为 (a, b)。上面加、乘、减三种运算都可以看成由有序数对到数集上的一个对应，也称一个**指派**，表示为

$(12,3)\to15$，$(12,3)\to36$　$(12,3)\to9$

$(3,12)\to15$，$(3,12)\to36$　$(3,12)\to-9$

式中箭头代表指派，不同的指派结果代表了不同的运算。由此可见，**数集 A 上的运算本质上是在数集 A 中有序数对到 A 自身的一个指派。**

设 * 是将数集 S 中的数指派给 S 中有序数对的一个法则，若 * 指派 S 中惟一的数给每一个 S 中的有序数对 (a, b)，那么 * 就叫做集 S 上的一个二元运算。

在这种意义下，加法、减法、乘法都是整数集上的运算。除法则不是整数集上的运算。并且我们还可以设计、定义许多新的运算。

例 1 在整数集上定义 $(a, b) \to c$，其中 $c=max(a,b)$

如 $(6, 2) \to 6$，$(3, 3) \to 3$，$(5, 7) \to 7$ 等等。

显然，"取大"指派是整数集上的运算。

例 2 在有理数集上，指派 $(a, b) \to \frac{a+b}{2}$ 是求两数平均数的指派，是有理数集上的运算。显然，这个"平均数"指派不是整数集上的运算。

二、代数运算

随着数学的发展，不仅撇开了符号的一切具体数字内容，而且根本撇开了数学运算本身数量的内容，定义出一般非空集合 A 上的运算。

设非空集合 A 和一个规则"$\circ$"，如果对于任意 $a \in A, b \in A$，通过规则"$\circ$"对应着惟一确定的 $c \in A$。则此规则"$\circ$"就叫作集 A 的一个代数运算（二元运算）。记为 $a \circ b = c$。

例 3 设 $A=\{0, 1\}$，指派规则如下表所列：

(1)

$\circ$	1	0
1	1	0
0	0	0

(2)

$*$	1	0
1	2	1
0	1	0

(1)

★	1	0
1	1	1
0	1	0

由代数运算定义可知：(1) 中"$\circ$"，(3) 中"★"都是集 $A=\{0, 1\}$ 上的代数运算，而 (2) 中"$*$"不是 A 上的代数运算。

例 4 在自然数集 N，整数集 Z，有理数集 Q，实数集 R，复数集 C 中，加法、乘法都是代数运算，减法是 Z、Q、R、C 上的

代数运算。在 N 中减法不是代数运算。数的除法在 N、Z、Q、R、C 中都不是代数运算，易知除法是 $Q\setminus\{0\}$，$R\setminus\{0\}$，$C\setminus\{0\}$ 中的代数运算。

例 5 三维空间中，向量的加法、减法都是代数运算，而向量与数的乘法不是代数运算，向量与向量的矢积是代数运算。

例 6 设 F 是定义在 $[-1, 1]$ 上实函数的集合，则对通常意义的函数的加法、减法、乘法都是代数运算。

例 7 R 上的运算 $\oplus$ 和 $\odot$ 定义如下：

$a\oplus b=a+b+1$，$a\odot b=a+b+a\cdot b$

其中"$+$"与"$\cdot$"都是普通数的加、乘运算，可以判定"$\oplus$""$\odot$"是 R 上的代数运算。

例 8 设 X 表示集合，$A(X)$ 表示集合 X 的所有子集所成的集合，当然 $A(X)$ 包含 X 本身及空集 $\varnothing$，那么"$\cup$"与"$\cap$"是 $A(X)$ 上的代数运算。

例 9 设 $\{T\}$ 为平面上所有平移变换的集合，则平面上两个平移变换的叠加是 $\{T\}$ 上的代数运算。

例 10 以 2 为模的剩余类只包含两个元素，$\{C_0, C_1\}$，其中 $C_0=[2n]$，$C_1=[2n-1]$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，根据剩余类加法法则，有

$C_0+C_0=C_0$

$C_0+C_1=C_1+C_0=C_1$

$C_1+C_1=C_0$

即

$+$	C_0	C_1
C_0	C_0	C_1
C_1	C_1	C_0

显见，$\{C_0, C_1\}$ 上的"$+$"为代数运算。

例 11 设 S_0 与 S_1 是绕平面上定点 O 分别旋转 0°与 180°的两个变换。根据变换乘法法则有

$S_0\cdot S_0=S_0$

$S_0\cdot S_1=S_1\cdot S_0=S_1$

$S_1\cdot S_1=S_0$

即

$\cdot$	S_0	S_1
S_0	S_0	S_1
S_1	S_1	S_0

显见，变换“·”是 $\{S_0, S_1\}$ 上的代数运算。

我们对上述例 10、例 11 进行比较，如果抛弃运算对象的个性，则得到一个二元集合 $M=\{a, b\}$ 上的一个代数运算“∘”。

$a\circ a=a$

$a\circ b=b\circ a=b$

$b\circ b=a$

即

∘	a	b
a	a	b
b	b	a

它不仅可以解释例 10 例 11 两例，而且可以适用于一切可能的解释。可见，运算对象的抽象化，使得运算具有了更广泛的适用的可能性。同时我们注意到，例 11 中变换 S_0, S_1 本身就是运算。因此例 11 是以运算为对象定义出的更抽象的运算。这也表明运算对象概念达到了何等抽象化和一般化的程度。

由运算对象的抽象化，运算成了抽象的对应法则。但是，它仍然具有个性。例如我们可以定义二元集合 $M=\{a, b\}$ 上的另一个代数运算“∘′”

∘′	a	b
a	a	a
b	a	b

即

$a\circ' a=a$

$a\circ' b=b\circ' a=a$

$b\circ' b=b$

“∘′”与“∘”同是 $M=\{a、b\}$ 的两个不同的代数运算，但“∘′”与“∘”也有共性，它们都满足交换律、结合律，如果舍弃“∘′”与“∘”的个性，只着眼于它们所满足的运算律的共性，抽象地看“∘′”与“∘”在这个意义上没什么本质差别。因此，运算也可以抽象化，即以运算所能满足的运算律作为运算的特征。

A 上的二元运算可以推广为 A 上的 n 元运算。即对于集合 A，一个从 A^n 到 B 的映射，称为集合 A 上的一个 n 元运算，如果 $B\subseteq A$，则称该 n 元运算是封闭的。再进一步抽象，可以发展出更一般的运算的概念。

三、一般意义下的运算

广义理解，运算就是集合元素之间所规定的某种对应法则。

设非空集合 A、B、C 和一个对应法则“ $*$ ”，如果对任意 $a \in A$，$b \in B$ 通过“ $*$ ”对应惟一确定的 $c \in C$。则称这个对应规则“ $*$ ”是由 A、B 到 C 的一个运算。

从广义观点看，函数关系是一种运算，泛函关系也是一种运算，任意集合之间规定的单值对应法则都可视为运算。在这个意义上我们可以说，数学研究的是抽象的量，量是以可以运算为特征的。

在数学抽象中，将一些定型结构的对应法则或形式定义为算子，算子本来是一些运算过程的抽象化结构，但数学的发展又反转来研究某些算子的性质，这些算子又成为了数学研究的对象。如数学家在拓扑空间中引进了函子或量度子的“能计算性”的概念，对新引进的量度子又进行了有系统的研究。

近世代数研究的运算是抽象的运算，其特征是用公理加以刻画的。因此近世代数被称为公理化的或抽象的代数学。一个非空集合 A 连同若干个定义在该集合上的运算 f_1，f_2，…，f_k 所组成的系统称为一个**代数系统**，记作 $\langle A, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$。即，对某种对象的某个集合，给出了一些运算以及这些运算所满足的规律（公理），我们就说给出了某一个代数系统。抽象代数的任务就是研究各种代数系统，如群、环、域、模、格等等。一个代数系统是一种数学模型的结构，完全决定于它的公理系，这种高度抽象的研究在科学中有着广泛的应用。

总之，运算对象是运算的实体，运算是运算对象间的作用，运算的特征是运算律，从运算对象到运算，从运算到运算律反映了对运算认识的深入。从数集的运算到代数运算到一般运算，反映着运算概念的辩证发展。

第三节 数学运算间的辩证联系

一、正运算与逆运算

运算（a，b）$\to c$ 并且（b，a）$\to c$，即运算具有可交换性时，则该运算的逆运算只有一个。

如加法的逆运算是减法，乘法的逆运算是除法。

如果一个二元代数运算不满足交换律

即（a，b）$\to c$，（b，a）$\to c'$（$c\neq c'$）

这时的逆运算就有两个。比如，$a^b=c$ 是乘方运算

显然，a^b 与 b^a 一般是不相等的，即乘方运算不满足交换律，所以它的逆运算有两个：

其一：$a=\sqrt[b]{c}$ 为开方运算，

其二：$b=\log_a c$ 为对数运算。

	运 算	已 知	未 知
乘 方	$a^b=c$	a，b	c
开 方	$a=\sqrt[b]{c}$	b，c	a
对 数	$b=\log_a c$	a，c	b

一定条件下正逆运算又有同一性。$a^b=c$ 与 $b=\log_a c$ 通过 $a^{\log_a c}=c$ 可以统一起来。

此外有些从 A 到 A 的单值对应形成的运算，同样存在逆运算问题，但其逆过程未必是单值的。因此为了确定其逆运算必须取其单值逆对应的区间作为主值区间，定义其逆运算。如三角函数与反三角函数运算就是这样。一般地当且仅当 A 到 A 的映射是一一映射时，才有互逆的运算。

总之正与逆是普遍存在的一种矛盾现象。在研究数学运算中，应对正、逆运算给予充分的注意。

二、多种运算间的相互转化

1. 由于对数的引入，建立了数之间通过运算形成的普遍联系。显然，任何一个实数 k 都可以表为以 a（$a>0$）为底的对数 $k=\log_a x$，再如 $2=\log_{10}100=\log_2 4=\log_3 9=\log_{\frac{1}{7}}\frac{1}{49}=\cdots$形式上可以灵活变换，并且把高级运算归结为低级的运算，从而提高了工作效率。

$$a\times b=c^{\log_c a}\cdot c^{\log_c b}=c^{\log_c a+\log_c b}\ (a>0,\ b>0,\ c>0,\ c\neq 1)$$

这表明任意两个数相乘可以化为同底数幂相乘，从而归结为对数相加。正是多种运算的普遍联系，使它们能从一个形式变到另一个形式，这种形式的转变成为数学科学最有力的杠杆。

2. 运算律之间的联系，也体现了多种运算间的联系。比如乘法对加法具有分配律（乘法分配律与加、乘的交换、结合律一起称为四则运算的基本运算律），它的重要性在于表达了较高一级运算对较低一级运算之间的另一种联系或转化途径。

$$a\times(b\pm c)=a\times b\pm a\times c$$

同样，第三级运算对第二级运算也具有分配性质。

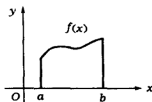
$$(a\times b)^n=a^n\times b^n$$

但对于数学而言，第三级运算对第一级运算则不具有分配性。即

$$(a+b)^n\neq a^n+b^n$$

然而运算性质与运算对象有关。对于不同的运算对象不能用同一种运算律来生搬硬套。例如对特征数为 p 的域，公式 $(a+b)^p\equiv a^p+b^p$ 是成立的。

3. 一元函数的一阶微分是最简单的微分运算。而求多元函数的高阶微分最终要归结于一元函数的一阶微分。一元函数的（一重）积分是最简单的积分运算，而多元函数的（n 重）积分也最终化归为一元函数的积分来计算。这是微积分中微分计算、积分计



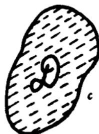
图（4-3-1）

算之间各自的明显的联系与转化。

4. 数轴上一个区间的定积分，同原函数在这个区间端点的函数值，通过牛—莱公式联系起来，如图（4-3-1）。

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

平面区域是平面上的曲线围成的。如图（4-3-2）以平面区域为积分范围的二重积分与沿着平面曲线进行的曲线积分密切相关，而把这两者联系起来的是著名的格林公式。



图（4-3-2）

$$\oint_c P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{\mathscr{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

推而广之，空间的区域由封闭曲面围成，曲面块由空间曲线围成。因而三重积分与曲面积分通过奥斯特洛格拉得斯基公式联系着：

设 P、Q、R 在域 Ω 上具有一阶连续偏导数，则

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中 S 围成域 Ω。

同样曲面积分与空间曲线积分之间由斯托克斯公式联系着。

如图（4-3-3），设 P、Q、R 在某个包含 S 在内的空间域内具有连续偏导数，则

$$\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

其中 c 为曲面 S 的边沿曲线。

需要指出的是，当引入外微分形式的概念以后，格林公式，奥式公式，斯托克斯公式实际上都可以用同一个公式写出来，即

$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_{\Sigma}\mathrm{d}\omega$$

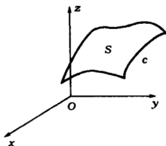


图 (4-3-3)

其中 ω 为外微分形式，$\mathrm{d}\omega$ 为 ω 的外微分，Σ 为 $\mathrm{d}\omega$ 的积分区域，(为封闭的区域)，$\partial\Sigma$ 表示 Σ 的边界，$\int$ 表示区域有多少维数就是多少重数。这个一般公式可以推广到高维空间，可推广到更一般的流形上去（什么叫流形不在此解释了）。这个一般公式揭示了高微空间的微分与积分如何成为一对矛盾的，也就是高维空间的微积分基本定理[1]。

4. 微分运算与代数运算之间的联系反映了不同类别的运算之间的联系。从导函数定义可以看出，微分运算是代数运算发展的必然结果，“代数方法就自行转化为与它对立的微分方法了”[2]。在微分学的发展中我们还看到了它与代数运算的另一种联系，即 $y=f(x)$ 的马克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\cdots$$

它是用 $f(x)$ 的各阶导数在 $x=0$ 点的值把 $f(x)$ 表示成无限项代数和的形式。

总之，各种运算之间是存在着不同形式的广泛联系的，揭露这种联系，不仅为解决数学问题提供了有效手段，而且在此基础上还可使我们有可能认识到更本质的背景。

三、运算和运算对象

1. 运算对象一般地决定着运算。

---

〔1〕 龚升：《简明微积分》第二册，人民教育出版社，1979 年版，第 184～186 页。

〔2〕 马克思：《数学手稿》，人民出版社，1975 年版，第 31 页。

谈到运算总离不开可供运算的对象，运算的概念是在研究这些对象中形成和发展起来的。所以，一般说来，运算对象决定着运算。

在自然数范围内，实施加法、乘法、乘方三种运算是通行无阻的。但是对实施减法、除法、开方则是有条件的。在有理数范围内，实施加、减、乘、除（除数不为0）、乘方五种运算是通行无阻的。但是实施开方是有条件的，而在复数中六种代数运算（除数不为0）都通行无阻。这正表明，**不同的对象**（数集）**决定着不同的自身封闭的运算**。

数学对象的扩充，运算也相应扩充，由于物理学与代数学的需要，在代数中建立了向量和矩阵的理论。对于向量、矩阵这些对象，又引入了相应的运算：向量的加法、数与向量的乘法，矩阵的加法、乘法等等。研究线性空间的线性变换，需要定义线性变换的加法和乘法的运算。

由于运算对象不同，运算规律不会完全相同。例如数的加法、乘法满足基本运算律，而变换的乘法和矩阵的乘法一般却不满足交换律。在实数域中乘法的逆运算可以实施，但是这一结论对一般的矩阵乘法和变换乘法却不适用。

总之，不同的运算对象具有不同的运算，运算对象决定着运算。

2. 运算对于运算对象的作用。

数概念的扩充和运算密切相关。自然数集对减法运算不封闭，因之有引入零与负数之必要；整数集对除法运算不封闭，因此有引入分数的必要。实数集对开方运算不封闭，因此有引进虚数的必要。新数的引进总要使原来不一定能实施的某种运算可以通行无阻，新数本身就是这种运算的因素渗透进数的结构之中而形成的，它的形成体现着这种运算可以实施，它本身就是这种运算的结果。如分数的分号实际上就是除号，分数本身就是分子除以分母的“商”。只要有了运算对象1，由于运算对于对象的反作用，即

对于运算封闭性的要求，数的概念就会不断扩充，比如考察 1（基数）到复数集的扩展过程从理论上可概括如下：1 和加法生成自然数集；1 和加、减生成整数集；1 和加、减、乘、除生成有理数集。如果运算步骤可以无限，那么 1 和加、减、乘、除生成实数集；1 和加、减、乘、除、乘方、开方生成复数集。

值得注意的是，运算不仅可以渗透对象，而且可以直接构造对象。微积分运算的建立就带有构造对象的性质。函数 $f(x)$的导函数的定义：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

运算对象的引进和运算方法的建立实际上是一回事。同样，用积分运算计算曲线弧长，曲边梯形面积时也有类似的特点。

在抽象的函数空间中，所谓空间的完备化，实际上是引入新的元素（如把基本列作为对等元)，使得施于空间的一定意义下的极限运算成为封闭的。

以上表明，随着数学发展的日益抽象，有许多运算的形成往往是伴随着对象一起产生，并且与运算对象的个性不发生直接联系，运算直接构造了对象。

思考题

1. 试述数的四则运算之间的联系与发展。
2. 简述运算概念的发展过程。

第五章

数学中的几对矛盾

本章我们分析初等数学以及基础数学中的几对重要矛盾，从整体来讲，如已知与未知，从数学中普遍遇到的矛盾来讲，如常与变、直与曲、有限与无限、连续与不连续等。我们分别予以探讨。

第一节 已知与未知

由已知的条件计算未知的数量，由已知的前提推证未知的结论。这种化未知为已知的问题，是科学的基本任务，因而也是数学研究与教学的基本课题之一。

作为探索、发现数学规律的方法，本质上是以已知为基础发现未知的方法，我们在第六章“数学的发现”将另作介绍。本节主要就具体的数学问题中，已知条件与所求结论之间的矛盾及其转化进行分析。

数学中的已知与未知，一方面界限分明，不得含糊；另一方面又相互依存、相互联系。一个数学问题，总要包含条件结论两部分。也就是已知与未知两部分，两者缺一就不成其为一个数学问题。从这个意义上说，已知与未知是处于“问题”这个统一体中互相依存的两个方面。对于一个数学问题，首先要弄清哪些是已知，哪些是未知，不把已知与未知搞个界限分明，就不能明确解题的目的与任务。进一步，必须揭示已知与未知内在的联系，创设从未知转化为已知的条件，或沟通由已知到未知的思路，否则就不能完成解决这个问题的任务。此外还有另一层已知与未知的关系，对每个解题者是不言而喻的，即这个问题在未解决之前解题方法与途径、结论等都是未知的，而解题者所掌握的数学知识与工具或题目所限定范围内的数学知识对解题者应为已知的。所以，从总体上说，正如莫斯科大学教授A·雅诺夫斯卡娅（1896—1966年）在《什么叫解题》的演讲中所说“解题就是把题归结为已经解过的题。”就是想办法用已知的知识达到认识、解决未知的目的。大则言之，我们学习和研究数学的一项重要任务，就是揭示已知与未知的内在联系，创设使未知转化为已知的条件，最后达到化未知为已知的目的。而揭示联系是创设条件实现转化的关键。

一、未知数参加运算——从算术到代数

数学中的已知数与未知数，既有共性又存在个性。“已知”和“未知”是它们不同的个性，“数”是它们的共性。在算术中只允许已知数参加运算，未知数完全处于被动的地位，总是“等待”由已知数计算出它的数值。这样实际上是把已知数与未知数这种个性绝对化，对立起来了。在算术四则中凡参加运算的必须是已知的数，造成算术四则问题往往列式子十分困难。不同的人所列的式子往往又不相同，列得是否正确，判断起来非常困难，只由最后答案相同也不能肯定其所列式子必有道理。很可能是得数正确，

列的式子不对。尽管对算术问题煞费苦心地进行各种分类，什么行程问题，流水问题，盈亏问题，鸡兔同笼问题等等，但是总是列算式这一关学生难于掌握，也就是揭示未知与已知的联系这一步不易完成。

相反，在代数中，人们不再把已知数与未知数的个性绝对化了，明确承认未知数也是数，在这一点上它和已知数是一样的，因而也允许它（例如以一个符号代表数）和已知数一起，像已知数一样参加运算。于是整个问题的面貌就大为改变了，这时揭示已知数与未知数的内在联系，即列代数方程式的工作可以直陈直写。它与列算术式相比，真可以说是轻而易举的了。列出方程求出其解，便达到了化未知为已知的目的，这样便由算术的方法过渡到代数的方法，实现了数学方法上的一次飞跃。

例如，一个农夫有若干只鸡与兔，它们共有 50 个头，140 只足，问鸡兔各几只？

算术解法可以各式各样。

解 1　假设 50 只全是鸡，则共有 50×2 只足。多出（$140-50\times2=$）40 只足。原因何在？在于每只兔子当作一只鸡时少计两只足，故 $40\div2=20$ 应是兔子的头数。

列式：$(140-50\times2)\div(4-2)=20$（兔头数）

$50-20=30$（鸡头数）

不同的同学因思路不同，解法也迥然不同。有一位同学就曾给出如下的算式：

解 2　　$140\div2-50=20$（兔头数）

$50-20=30$（鸡头数）

这个列式结果正确，但理由是否充足呢？很费琢磨，这个学生的解释是：把鸡的腿捆在一起都看成金鸡独立的“单脚鸡”，把兔看成前脚抱着大萝卜站着的“双脚兔”。这时有头 50，有足（$140\div2=$）70。因为每只“双脚兔”比“单脚鸡”多计一只脚，共计多计 $70-50=20$ 只脚，这也正是兔的头数！这个解释简直叫人拍

案叫绝！但这个同学若不讲出来，怎么能从 $140\div2-50=20$ 的算式中看到上述的思维过程呢？

现在我们再看代数解法：

解 3　设农夫有鸡 x 只，共足 $2x$，

有兔 $50-x$ 只，共足 $4(50-x)$

由鸡兔总足数为 140，得

$$2x+4(50-x)=140$$

解得　$x=30$（鸡的只数）

$50-30=20$（兔的只数）

算术方法因题而异，因思路而异。而代数方法则正如牛顿所说："要想解一个有关数目的问题或有关量的抽象关系的问题，只要把问题里的日常语言翻译成代数的语言就成了"。所谓代数语言的基本词汇就是代数式，把日常语言翻译成代数的语言，就是通过代数式列出方程。

方程式正体现了已知与未知的对立统一。"如果一个方程式的已知各项中没有包含解这个方程式的因素，那我们是不能解这个方程式的。"[1] 因此一个代数方程本身正是未知因素与解这个未知因素的条件（已知因素）的统一体。

一个方程是含有未知数的等式，未知数是我们所要求的。另一方面，方程中还包含有解这个方程的因素，这是已知的一面，比如各项的数字系数等就是已知的一面。这两方面共存于方程式这个统一体中，未知数与已知数通过运算及相等关系而联系着和制约着。方程式中的 x 的位置集中体现了已知与未知的矛盾。x 是未知数，但 x 又像已知数一样与其他已知量一起参与代数运算，x 具有已知与未知的二重性，列出方程式时，x 的未知性占主导方面。解方程就是利用同解变形实现 x 的未知性向已知转化，使方程式中所包含的可解因素逐步明朗化，最后使 x 由未知变为已知，得

[1] 《马克思恩格斯全集》第 35 卷，人民出版社，1963 年版，第 154 页。

出方程的解。

在代数方程式中已知与未知的矛盾，对微分方程，函数方程也可作类似的分析。

二、利用已知逐次逼近未知——迭代法

在代数学中，解具体的代数方程或超越方程往往遇到困难。而解线性方程组有简明易懂的加减消元法，代入消元法等。还有形式整齐的行列式解法——克莱姆规则：

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式 $d=|A|\neq 0$

那么线性方程组（1）有解，且解是惟一的，解可通过系数表为

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, \cdots, x_n = \frac{d_n}{d}.$$

其中 d_i 是把 A 中第 i 列换成常数项 b_1，$b_2\cdots$，b_n 后所成矩阵的行列式，即：

$$d_i = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & & \\ a_{n1}\cdots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$(i=1, 2, \cdots, n)$

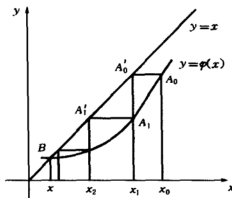
克莱姆规则即可判定方程组的解是否存在及惟一，又给出了完美的解的形式。然而当解未知数非常多的线性方程组时，克莱姆规则实际上并不好用。因为运算的次数多得惊人而且误差积累也很大。并且不是重复的运算程序，就是使用电子计算机也不方便。于是迫使人们寻求新的方法。迭代法就是在这种情况下逐步建立起来的。

我们先从简单的方程 $p(x)=0$ 为例来阐述迭代思想。

方程 $p(x)=0$ 可以改造成为它的等价形式 $x=\varphi(x)$

这里我们给 x 一个初始近似 x_0，得

$$x_1=\varphi(x_0)$$
$$x_2=\varphi(x_1)$$
$$x_3=\varphi(x_2)$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n=\varphi(x_{n-1})$$
$$\cdots\cdots$$



图（5-1-1）

如果所得的序列 $\{x_n\}$ 收敛

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$

且 $\varphi(x)$为连续函数，则

$$x^*=\lim_{n\to\infty}x_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_{n-1})=\varphi(\lim_{n\to\infty}x_{n-1})=\varphi(x^*)$$

可知 x^* 就是 $x=\varphi(x)$的一个解，即 x^* 是 $p(x)=0$ 的一个根。其直观意义如图(5-1-1)所示。

例如，求 $p(x)=x^3+\sin x=0$ 的根，即转化为求 $x=x^3+\sin x-x$ 的根，其中 $\varphi(x)=x^3+\sin x-x$。

这样，求 $p(x)=x^3+\sin x=0$ 的根，转化为用迭代法求 $x=x^3+\sin x-x$ 即 $x=\varphi(x)$的根。其实质就是求 $\varphi(x)$的不动点。这时给未知数 x 一个初始值 x_0，使其已知化，求得相应的 x_1，这样一直

下去，直到 $x_{n+1}=x_n$ 时的情形就可以了。这种迭代法程序单一、简便，如果中间产生错误一般只会影响收敛速度，并不影响最后解答。

对于线性代数方程组 (1)，简记为 $AX=B$，其中 A 为 (1) 的系数矩阵，X 是列向量

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

B 是列向量

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

首先，把方程组按一定的收敛条件改写为

$$X = A'X + B' \tag{2}$$

其中，A' 是矩阵，B' 是列向量，一般说来 A'，B' 与 A、B 是不同的。其次，再把方程组 (2) 中在等号左右两侧的未知数列向量 X 记上不同的右上标 $(n+1)$ 与 (n)，以示区别，于是方程组 (2) 就变成下列形式：

$$X^{(n+1)} = A'X^{(n)} + B' \tag{3}$$

这时选出一组初始值 $X^{(0)}$，代入 (3) 的右侧，则可计算出 (3) 的左侧 $X^{(1)}$，依此可相继算出 $X^{(2)}$，$X^{(3)}\cdots$，$X^{(m)}$，$X^{(m+1)}$，直到

$$X^{(m+1)} = X^{(m)}$$

为止。这时 $X^{(m)}$ 就是所求的解。

为了解决具体问题中由已知条件计算未知量的问题，也促进着数学概念与内容方法的发展，形成了计算数学这一新的分支。

根据已知量来计算未知量的过程，逐渐产生了“算法”的概念。

如果能把待求的未知量用已知量之间的算术运算表达出来，这就是算术表达式。例如一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解 x 可以通过系数 a、b、c 表示出来 $x=\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})$。有了这样的表达式，人们只要按照式子规定的顺序程序进行运算就可求出未知量，这当然是计算未知量的一种简单而理想的办法。在古典数学中，人们曾花费了不少精力去寻求一些问题解的算术表达式，但客观规律很复杂，就连五次以上的代数方程的根要找到公式解也是不可能的。于是人们不得不利用无穷级数和积分的办法来表示一个未知函数，这就是所谓分析表达式。在分析表达式中，虽然未知量体现为已知量运算的无穷序列，但人们总可以通过有限次运算（舍去级数的余尾项，用有限和来代替积分）来任意地接近未知量，分析表达式比算术表达式虽然复杂了，但仍具有一目了然的优点。然而很遗憾，大量的数学问题，就连解的分析表达式也是求不到的。

看来，无论算术表达式还是分析表达式都不足以刻画数量间的复杂关系，这就需要把以往的由已知量求未知量方法的概念加以推广，产生了所谓算法的概念。

所谓算法，简言之，就是对某一个问题，从适当给定的已知量出发，根据一个确定的规则，一次一次地做运算，每一次运算都以前一次运算结果数据为依据，经过有限多次运算能够算出未知量的值（一般是近似值），这样的一个运算的规则我们就称为一个算法。人们习惯上将这样得到的解称为“数值解”，而将前述解的算术表达式与分析表达式称为“精确解”。

针对具体问题寻求新的合理的算法，乃是计算数学的一项艰巨任务。

三、从未知出发寻求已知——倒推分析法

一个数学定理证明的最后书写形式，通常是一步一步的“因

为”“所以”地从已知的前提推导出未知的结论，这在逻辑学中是演绎形式的推理结构。然而，这个推导步骤的建立，一般说来并非一帆风顺，恰恰在分析问题的思路中需要利用已知与未知的辩证联系。

一切数学问题都包括已知条件和结论两部分。解数学问题，就是从已知条件出发，经过严格的逻辑推理，得出所求的结果。因此，解决数学问题的关键，就在于能够准确而迅速地探索出由已知条件到达于所求结论的逻辑通路。寻求这条逻辑通路的一种方法是从未知出发，探索已知与未知的联系，这就是数学中经常使用的执果溯因的分析法。

例 1. a、b、c、$d\in R$，求证$\frac{(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\leqslant 1$。

分析：要证$\frac{(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\leqslant 1$.

只须 $(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

只须 $a^2c^2+2abcd+b^2d^2\leqslant a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$

只须 $2abcd\leqslant b^2c^2+a^2d^2$

只须 $0\leqslant b^2c^2-2abcd+a^2d^2$

只须 $0\leqslant(bc-ad)^2$ 即可.

而这最后一个式子是确实成立的，倒过来写就是证明。

这种分析法的要点是：要证 $A\Rightarrow B$，

推证过程 $A\Rightarrow A_1\Rightarrow A_2\Rightarrow A_3\Rightarrow\cdots\Rightarrow A_n\Rightarrow B$，$A$ 是 A_1 的充分条件，A_1 是 A_2 的充分条件……所以反过来执果溯因分析时，总是要寻求充分条件。即从结果 B 开始寻求它的充分条件 A_n，由 A_n 寻求 A_n 的充分条件 A_{n-1}，…，直到由 A_1 寻求到 A_1 的充分条件恰是 A 或已知显然成立的事实时，就完成了倒推分析过程，找到了联系已知与结论的逻辑通路。即暂时把未知当已知，把已知当未知，使二者地位转化，从而探寻出逻辑通路，然后再转化回来，就可写出证明。

例 2. 直角三角形中，a、b 为直角边，c 为斜边，求证 $a+b\leqslant$

$\sqrt{2}c$.

分析 1. 要证 $a+b\leqslant\sqrt{2}c$

只须　$(a+b)^2\leqslant 2c^2$

只须　$(a+b)^2\leqslant 2\ (a^2+b^2)$　（结合已知 $a^2+b^2=c^2$）

只须　$a^2+2ab+b^2\leqslant 2a^2+2b^2$

只须　$2ab\leqslant a^2+b^2$

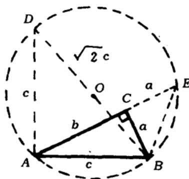
即　$0\leqslant\ (a-b)^2$.

这显然成立，因此思路已经沟通。

分析 2. 要证 $a+b\leqslant\sqrt{2}c$，

只须　将 $a+b$ 与 $\sqrt{2}c$ 进行比较。

如图（5-1-2）作 $DA\perp AB$ 于 A，使 $DA=AB$，连 BD，则 $BD=\sqrt{2}c$，延长 AC 至 E，使 $CE=BC$，则 $AE=a+b$



图（5-1-2）

因此，要证 $a+b\leqslant\sqrt{2}c$

只须　$AE\leqslant BD$

但由作法知 $\angle ADB=\angle AEB=45°$，

所以 A、B、E、D 四点共圆。

又 $\angle BAD=90°$，所以 BD 为该圆的直径。

当然弦 AE 不大于直径 BD 显然成立。这样，我们沟通了几何证法的思路。

分析 3. 要证 $a+b\leqslant\sqrt{2}c$

只须证　$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{c}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{b}{c}\leqslant 1$

但　$\frac{a}{c}=\sin A$，$\frac{b}{c}=\cos A$

只须证　$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A\leqslant 1$

只须证 $\sin\frac{\pi}{4}\sin A+\cos\frac{\pi}{4}\cos A\leqslant 1$

只须 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-A\right)\leqslant 1.$

这显然是成立的，于是我们又沟通了三角方法解证本题的思路。

四、肯定已知，否定结论得出矛盾——反证法

在论证一个数学命题时，从否定未知出发，根据已知的前提，即公理、定理以及所证命题的条件，进行正确的逻辑推理，而导致矛盾。但已知又是确定无疑的，此时只能是“否定未知”是不正确的，从而由反面肯定了未知的正确性。即在肯定已知前提的条件下，用否定待证结论而导出矛盾的办法来肯定待证结论，正是数学中常用的反证法的基本思想。

例 1. 在方格纸的每个方格中都写上一个数，使得每个方格的数都是其相邻四个方格里的数的算术平均数。我们从这块方格纸上随意剪下一块，证明，如果某个方格里的数大于这块纸中其余方格里的任何一个数，那么，这个数一定在这张纸块边缘上的方格里。

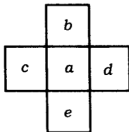


图 (5-1-3)

证明：设数 a 是从方格表中剪出一块的所有方格填的数中最大的数，如果 a 不在这块方格边缘的格子中，则 a 应在内部方格中，即这个格子的上、下、右、左都应有相邻的方格，设其方格中填的数分别是 b，c，d，e 如图 (5-1-3)。根据条件，有

$$a>b,\ a>c,\ a>d,\ a>e$$

$\therefore\ 4a>b+c+d+e$

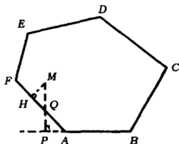
$$a>\frac{b+c+d+e}{4}$$

这与 a 是 b、c、d、e 的算术平均值的条件相矛盾。所以最大

数 a 必在边上的方格里。

例 2. 凸多边形内任一点向各边引垂线。求证：垂足中至少有一个落在多边形边上而不落在边的延长线上。

分析：设 M 点到各边的距离中，以 M 点到 AB 的距离最小，作 $MP\perp AB$ 于 P，如图（5-1-4）。



图（5-1-4）

假设垂足 P 不落在边 AB 上而在其延长线上，即 P 在形外，则 MP 必与多边形的某一边交于点 Q。显然 $MP>MQ$（凸多边形性质）。

又自 M 作所交边 AF 的垂线 MH，垂足设为 H。有 $MH<MQ$，所以 $MH<MP$。

这与 MP 是 M 到凸多边形 n 个边的 n 个距离中的最小距离的假设相矛盾，所以垂足 P 点应落在边 AB 上。

例 3. 证明：质数的个数无限多。

证明：假设质数的个数是有限个，例如只有 n 个，我们设它为 p_1，p_2，…，p_n。我们考察数

$$p=p_1p_2\cdots p_n+1$$

①p 显然是大于 1 的自然数。

②p 与 p_1，p_2，…，p_n 都不相同，因而不能是质数。

③p 又不能被 1 和它自身以外的质数 p_1，p_2，…，p_n 所整除，因而 p 不能是合数。

大于 1 的自然数，既不是质数又不是合数根本不可能。出现这种矛盾的原因是假设了质数个数是有限个，因此质数个数有限的假设不能成立，由此可知质数个数一定是无限多。

反证法不仅帮助人们解决了许多难以证明的课题，而且有时运用反证法还可以为数学开拓出新的天地。例如，人们在试图证明欧氏第五公设的过程中，采用反证法一直推不出矛盾，在这一事实的启发下，逐步形成了非欧几何的思想，有力地促进了几何

学的发展。

综上所述，数学上化未知为已知的这一基本课题，其关键就是揭示已知与未知的联系。但揭示的方法并不都是简单地、呆板地从已知出发去寻求与未知的联系，也常常从未知出发，对已知与未知交错分析，逐步找出它们的联系，达到解决问题的目的。

思考题

1. 试从已知与未知矛盾分析揭示从算术到代数飞跃的实质。
2. 试举例分析倒推分析法中已知与未知的相互关系。
3. 试举例分析在反证法中已知与未知的相互关系。

第二节 直 与 曲

恩格斯曾经指出，“高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾，在一定条件下直线和曲线应当是一回事。”这句话是就 19 世纪以前数学的情况而言，高等数学主要是指分析数学。分析数学正是利用直与曲以及其他一些矛盾的转化达到了初等数学所完全不能达到的目的。

直与曲是两个完全不同的数学概念。从直观形象看，前者平直后者弯曲；从几何特性来看，前者曲率为 0，后者曲率不恒为 0；从代数表达式来看，前者是线性方程，后者是非线性方程。因此直与曲的差别是明显的，那么这两个差别如此显著的对立的概念是否存在内在联系，能否在一定条件下互相转化呢？数学的发展告诉我们，直与曲除了有非直即曲的一面，也存在亦直亦曲的一面。存在直与曲之间的中介状态，直与曲通过这个中介状态实现转化。

一、曲线具有渐近线部分的特性

曲线的渐近线，是在曲线无限延伸时与一条直线“彼此不断

接近，但永远不会相交”，其数学表达式如下确定：

设曲线为 $y=f(x)$，其渐近线为 $y=kx+b$，如图(5-2-1)。

则 $$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0。$$

问：有渐近线的曲线在它无限延伸的部分的特征，是曲线还是类似直线？

回答：是曲线，因为这部分是整个曲线 $y=f(x)$ 的一部分，这部分上每一点的曲率都不为 0。

它又很像直线，而且延伸越远就越像！虽然每点曲率均不为 0，但在延伸过程中，曲率无限趋近于 0。

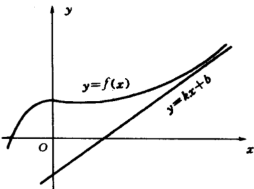


图 (5-2-1)

因此，应该说，在无限延伸部分你就很难分出它是直线还是曲线，可以说它是“亦直亦曲”，是直线与曲线之间的一种中间状态。既是带有直线性质的曲线，也是具有“曲”性的“类直线”，是直与曲对立的“中介”，是一种“亦直亦曲”的状态。

对曲线及其渐近线，在曲线无限延伸部分传统的平行观念不适用了，认为“不平行必相交”这种非此即彼的观念在这里也站不住脚了。

按传统的平行观念，二直线平行，则距离处处相等；但现在这两条“直线”是“彼此不断接近”，因此这两条“线”不是平行的。

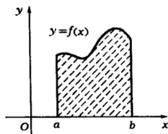
既然这两条线不平行，按传统观念就应相交，然而他们彼此不断接近却永远不会相交！

可见这两条“线”处于既不平行又不相交的一种中介状态。

利用曲线与其渐近线的关系，可以在整体上以直代曲，用渐近直线来代替具有渐近线的曲线的部分。

二、直线与曲线在微分学中最终等同起来

下面我们分析在微分学中，在局部范围直与曲等同的例子。从而体会直与曲如何最终实现等同的思想。



图（5-2-2）

例 1. 求曲边梯形的面积

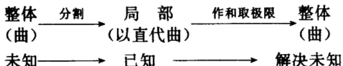
如图（5-2-2）所示的阴影部分，即 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 及 $y=0$ 所围的部分称为曲边梯形。在求曲边梯形面积过程中，更一般地、深刻地体现了曲转化为直，直转化为曲的辩证思想。本质上是个先微“分”后积“分”的过程。

第一步：把曲边梯形用平行于 y 轴的直线分割成许多小的曲边梯形。在每个小曲边梯形中把曲边看成直边，于是就可以用这些小“直边梯形”的面积近似地代小曲边梯形的面积。这样在分割的条件下实现了局部的“以直代曲”。

第二步：用小直边梯形面积之和在整体上近似地代替曲边梯形面积的值，这种代替当然是有误差的。

第三步：再把分割无限加细，近似程度会越来越好，通过取极限，即当最长小区间的长度趋于 0 时，就使小直边梯形面积的和转化为原来大的曲边梯形的面积。这样一来，局部的“直”经过无限积累又反过来转化为整体的“曲”，最后得出了曲边梯形的面积。

上述三步，实际上就是定积分定义中分割、作和、取极限的过程，其思维过程是

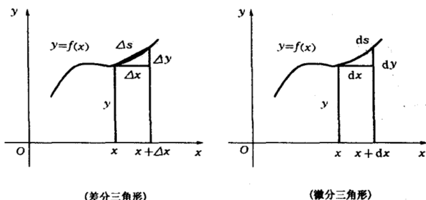


作为初等数学，要求的是精确的在有限范围的计算，久而久

之形成了一种规范（共同接受的模式、假设、规则），但遇到曲边梯形面积时，这种常规的办法解决不了了！这时必须突破规范，发生观念上的变革！“当直线与曲线的数学可以说已经山穷水尽的时候，一条新的几乎无穷无尽的道路，由那种把曲线视为直线（微分三角形）并把直线视为曲线（曲率无限小的一次曲线）的数学开拓出来了”。[1] 这里的意义不正是不言自明了吗！

例 2. 计算曲线的弧长，如图（5-2-3）

在直角坐标系中弧长的微分 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$。

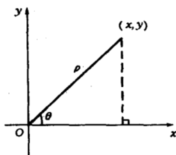


图（5-2-3）

左图是差分三角形图，在差分三角形中以弦代曲边，得 $\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 的过程中，左图中的差分三角形变为右图中的微分三角形，从而得出 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ 的弧长公式。

这里，辅助三角形，即微分三角形的两个边是由 dx 和 dy 构成的。因此它们比点还小，所以在这种情况下要敢于把弦等同于弧，或者反过来把弧等同于弦。也就是差分三角形是具体的三角形。在这种三角形中，边为 $\Delta x,\Delta y$，弧 Δs 以弦长近似代替。但当 $\Delta x\to 0$ 时变为微分三角形，$\Delta x,\Delta y$ 已经被扬弃为无穷小量，Δy 与

[1] 恩格斯：《自然辩证法》人民出版社，1971 年版，第 242 页。



图(5-2-4)

Δx之间的关系却保存下来了，三角形变成了比点还小的想象中的三角形，在这个微分三角形中实现了直曲等同。

下面我们研究极坐标曲线 $\rho=f(\theta)$的弧长公式，如图(5-2-4)。

利用坐标变换 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta$$

$$\therefore\quad \mathrm{d}x=\mathrm{d}\rho\cos\theta-\rho\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

同样可求得 $\mathrm{d}y=(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)\mathrm{d}\theta$

$$\therefore\quad \mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$$
$$=\sqrt{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)^2+(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$
$$=\sqrt{\rho'^2+p^2}\mathrm{d}\theta$$

$\therefore$ 极坐标弧长微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\mathrm{d}\theta=\sqrt{(\rho\mathrm{d}\theta)^2+(\mathrm{d}\rho)^2}$$

下面我们分析 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\rho\mathrm{d}\theta)^2+(\mathrm{d}\rho)^2}$的几何意义。正如在本书第 87 页中我们指出过的，把 ΔmRM 看成直角三角形，即 $\angle mRM=90°$，这样才有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\rho\mathrm{d}\theta)^2+(\mathrm{d}\rho)^2}\text{ 成立。}$$

此时$\angle OMR=\angle mRM=90°$，所以 OR 必须看成是与 OM 平行的，如图(5-2-5)。

可见，为了计算极坐标下曲线弧长的微分，人们在微分三角形中实现了直曲等同，把不平行的线视为平行线，这恰恰表明："高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下直线和曲线应当是一回事。高等数学还有另一个矛盾：在我们眼前相交的线，只要离开交点五六厘米，就应当认为是平行的，即使无限延长也不

会相交的线。可是，高等数学利用这些和其他一些更加尖锐的矛盾获得了不仅是正确的、而且是初等数学所完全不能达到的成果”。[1]

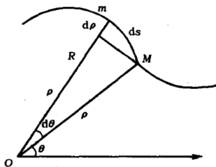


图 (5-2-5)

例 3. 极坐标中 圆的方程为 $\rho=a$，试计算圆的面积 σ。

解：如图(5-2-6)

$$\sigma=\iint \mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho \mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\mathrm{d}\theta=\pi a^2$$

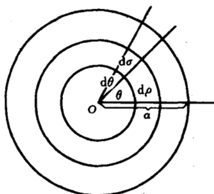


图 (5-2-6)

在图中 $\mathrm{d}\sigma=\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho$ 的意义是将曲边“小环块”用矩形小块所替代。

三、非线性问题线性化

求经验曲线，但有时经验曲线并非直线型的，怎么办？方法很多，其中有一种方法就是利用直曲在一定条件下互相转化的思想，可以利用坐标变换把非直线型化为直线型。即可应用求直线型经验公式的方法来确定函数关系。

例 4. 已测得某水库深水体积 V(万方)和水深 H(米)之间的对应数值表(5-2-1)：

[1] 恩格斯：《反杜林论》人民出版社，1970 年版，第 118～119 页。

表(5-2-1)

H(米)	0	5	10	15	20	25	30	35
V(万方)	0	15	45	119	205	315	460	610

利用描点法描出的曲线近似抛物线，如图（5-2-7）：

$$V = aH^2$$

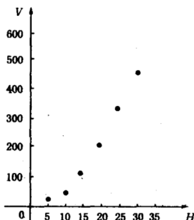
作变换 $H^2 = H'$, $V = V'$

得表（5-2-2）：

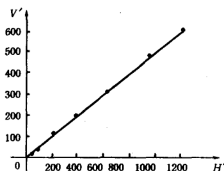
表（5-2-2）

$H' = H^2$	0	25	100	225	400	625	900	1225
V'	0	15	45	119	205	315	460	610

这样在 H',V' 直角坐标系中描点，如图(5-2-8)曲线近似于方程 $V' = aH'$。用直线型经验公式，确定 $V' = 0.504H'$



图（5-2-7）



图（5-2-8）

代换回来：

$V = 0.504H^2$

这个例子中也是综合利用了“曲化直”和“直化曲”的思想。

可见，通过直认识曲，把非线性问题线性化，是解决数学问题

的思想方法之一。

线性函数 $y=ax+b$ 是最简单的函数，它的图像是直线，而每个可微的函数在一小段上都可以看作是接近于线性函数。因此就产生了以线性函数在局部代替非线性函数的方法。

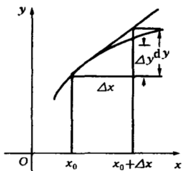


图 5-2-9

因为对函数 $y=f(x)$，

有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$

即 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=f'(x_0)+a \quad (\Delta x\to 0, a\to 0)$

$$\therefore \quad f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+a(\Delta x)$$

当 Δx 很小时，就有

$$f(x_0+\Delta x)\backsim f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

即 $f(x)\doteq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$$=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0$$

这表明在 x_0 附近 $f(x)$ 可用一个线性函数近似代替。用微分表示就是 $\Delta y\sim \mathrm{d}y$，即以切线(直)代替曲线，这种方法推而广之成为分析数学中的一个重要思想——把非线性问题线性化的思想方法。

四、在一定条件下也应用以曲代直

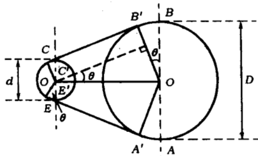
例 1. 在实际应用中直传动皮带轮长度近似计算公式为

$$\frac{\pi}{2}(D+d)+\frac{(D-d)^2}{2l}+2\sqrt{l^2-\left(\frac{D-d}{2}\right)^2}$$

其中整个皮带长是指 $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BB'}+B'C+\overset{\frown}{CE}+EA'+A'A$，圆心距 $OO'=l$，两圆直径分别为 D、d，则

$$B'C=EA'=\sqrt{l^2-\left(\frac{D-d}{2}\right)^2}$$

因而问题归结为计算$\overset{\frown}{BB'}(=\overset{\frown}{AA'})$以及$\overset{\frown}{EE'}(=\overset{\frown}{CC'})$，$\overset{\frown}{CE}=\frac{\pi d}{2}-2\overset{\frown}{EE'}$。



图（5-2-10）

由于$\overset{\frown}{BB'}$所对的角θ较小，故用$\sin\theta$代θ（以曲来代直），于是可求得近似值：如图(5-2-10)

$$\theta \doteq \sin\theta = \frac{D-d}{2l}$$

$$\overset{\frown}{BB'} = \frac{D}{2}\theta \doteq \frac{D}{4l}(D-d)$$

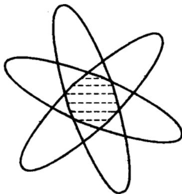
同理$\overset{\frown}{C'C} = \frac{d}{2}\theta$

$$\doteq \frac{d}{4l}(D-d)$$

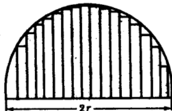
将这些值加在一起，就得皮带长的简便近似公式。

例 2. 在车工车六角螺母时，车刀运行轨道如图(5-2-11)是三个很扁的椭圆。

这样在扁平的地方是以曲线来代替直线，从而实现用车刀车出六角螺母的。



图（5-2-11）



图（5-2-12）

最后应该指出，在不同的问题中，直曲转化的条件是不同的。比如半径为r的半圆，求其周长，如果用图(5-2-12)中所示的线段

代替弧长，结果求得半圆周$=2r$，这显然是荒谬的。用这种方法可以"证明"在$[a,b]$上的任意曲线长均等于$b-a$。错误的根本原因在于以"直"代"曲"的过程中，没有用等价无穷小量去代替。这说明**直曲转化是一种数学思想，将这种思想实施在具体问题中是有条件的，必须实行等价无穷小代换。**这个事例告诉我们辩证法可指导你想问题，但不能代替你做数学题。同时辩证法是科学的思想方法，辩证法不等于诡辩论。

在没认识转化条件之前，可能会发生这样那样的错误，只有认识到以直代曲近似代精确本质上是以等价无穷小代换时，才能在数学中自如地加以应用。

思考题

1. 试说明分析数学的主要基础之一是"在一定条件下直线和曲线应当是一回事"。

2. 试分析以直代曲是有条件的，这个条件的实质是什么？

第三节 常 与 变

常量与变量是数学中的两个基本的概念。常量是反映事物相对静止状态的量，而变量则是反映事物运动变化状态的量。因而这两种量的意义有着严格的区分，但是它们又是相互依存，相互渗透，依据一定条件相互转化的。在数学学习中要注意体会常与变的相互转化，在数学研究中更要注意常量与变量在一定条件下相互转化的关系。

一、常量与变量的相对性

1. 常量在一定条件下具有任意性。比如$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，其中$a$、$b$都是常量，但它们又有任意性，所以这个公式才有一般性。

公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 也是一样的道理。α、β 既是常量但又有任意性，所以这个公式才具有一般性。

当 $\alpha=\beta$ 时，$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ 是其特例之一。

当 $\beta=-\gamma$ 时，$\sin(\alpha-\gamma)=\sin\alpha\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma$ 也是其特例之一。

特别明显的例子是不定积分中的积分常数 C，它是任意的常数。比如 $\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$，其中 C 为常数，对每一条特定的曲线来说 C 是确定的，但 C 又有任意性，对不同曲线来讲 C 在实数范围变动，因此 x^2+C 是一个曲线族。

2. 变量在一定条件下又有不变性，可视为常量。 比如在求多元函数偏导数的过程中，对 x 求导时就要暂时把变量 y 视为常量。

如 $z=x^3+2x^2y^3+e^xy$

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+4xy^3+e^xy$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0+6x^2y^2+e^x$

从偏导数的几何意义中看得更明显，如图(5-3-1)。

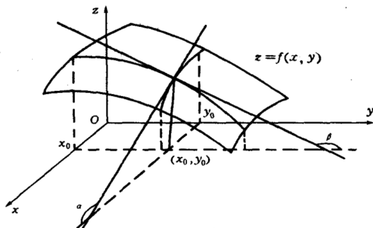


图 (5-3-1)

y_0 是常量又具有任意性，所以对每个 y_0 作的截面上变为求 z

对 x 的导数问题，由于 y_0 的任意性、变动性，所以对固定 y_0 的 $\frac{dz}{dx}$，将 y_0 任意化为 y 就是二元函数的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

二、通过常量来刻画变量

事实上变化运动的东西是通过它的反面——静止来度量的。

在几何变换中我们关注的是在某种几何变换下的不变量、不变性。不变量与不变性是变换的本质特征。

现将各种几何变换的不变性综合列表(5-3-1)如下

表 (5-3-1)

几何变换		不　变　性
合同变换	反射变换	线段长度不变(保长变换) 角的大小不变(保角变换) 反射轴上的点是变换下的不动点
	平移变换	线段长度不变，角的大小不变
	旋转变换	线段长度不变，角的大小不变 旋转中心是变换下的不动点
相似变换		角的大小不变 对应线段之比不变
仿射变换		简比保持不变 平行线段的比保持不变
射影变换		A　B　C　D 交叉比保持不变：$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}$ 不变
拓扑变换		曲线闭合性、相交性保持不变

比如在代数中的正交变换下二次曲线有许多不变量。

考虑两个变数的二次多项式。

$$Q(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F \tag{1}$$

在直角坐标系中进行平移或旋转，把 $Q(x,y)$ 中的 x、y 用新坐标 x'，y' 的表达式代入以后，经过整理可得如下形式的式子：

$$Q'(x',y')=A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F' \quad (2)$$

这时，$Q'(x',y')$ 中的各项系数与 $Q(x,y)$ 中的各项系数，可能发生种种变化，但是可以证明，如下一些量是保持不变的，例如

$$I_1=A+C=A'+C'$$

$$I_2=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix}$$

$$I_3=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix}$$

就是不变的，我们还可以进一步证明，多项式(1)的任何一个正交不变量都可以通过这三个不变量来表达。因此，这三个不变量通常称之为**基本不变量**。此外，我们还可以证明对于单纯的旋转来说，下列的 K 也是不变的，即

$$K=\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} A' & D' \\ D' & F' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} C' & E' \\ E' & F' \end{vmatrix}$$

但是在平移中则不具有这种性质，因此，人们称 K 为**半不变量**。

这些基本不变量和半不变量很有用处。例如，若令多项式(1)等于零，它就变成为一个二次曲线的方程，这个方程是表示 x，y 之间相依关系的方程。因而它还是给出了一种函数关系，所以问题的实质还是属于变量的范畴，那么这个方程所表示的曲线属于哪种类型？恰是用 I_1，I_2，I_3 及 K 的数值来判定分类的。具体分类如表(5-3-2)中所示。

表中规范方程里的 λ_1，λ_2 是 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$ 的根。

另外，我们还可以从规范方程导出用不变量 I_1，I_2，I_3 及半不变量 K 来计算椭圆和双曲线的半轴 a 和 b，抛物线的参数 p 以及平行线间的距离 $2a$ 的公式如下：

$$a、b=\sqrt{\frac{2\cdot|I_3|}{|I_2|\cdot|I_1\pm\sqrt{I_1^2+4I_2}|}}$$

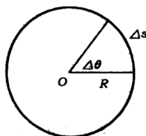
$$p=\sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}}$$

$$2a=2\sqrt{-\frac{K}{I_1^2}}$$

表(5-3-2)

类型的标志			曲线的类型	规范方程	标准方程
$I_2>0$	$I_1I_3<0$		椭　圆	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
	$I_1I_3>0$		虚椭圆		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
	$I_3=0$		点		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
$I_2<0$	$I_3\neq0$		双曲线		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
	$I_3=0$		一对相交直线		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
$I_2=0$	$I_3\neq0$		抛物线	$I_1x^2-2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}y=0$	$x^2=2py$
	$I_3=0$	$K<0$	一对平行直线	$I_1x^2+\frac{K}{I_1}=0$	$x^2=a^2$
		$K>0$	一对虚的平行直线		$x^2=-a^2$
		$K=0$	一对重合直线		$x^2=0$

此外，曲线的曲率与密切圆的关系，也反映了通过常量来刻画变量，曲率是以密切圆曲率的不变来刻画变的。如图(5-3-2)。



图(5-3-2)

对于圆来说，平均弯曲程度$\frac{\Delta\theta}{\Delta S}=\frac{1}{R}$为常数，半径相同的圆上各点曲率值一样。对不同的圆来说，半径小的圆弧比半

径大的圆弧更加弯曲。用半径的倒数来描述圆的曲率是一个很适切的数量。但对一个弯曲程度各处不同的曲线，我们就遇到了一个变与不变的矛盾，即弯曲程度整体的变与局部不变的矛盾，因而处理这类问题的基本思想，仍是在局部以不变代变，如图(5-3-3)，因为对于半径为 ρ 的圆弧有

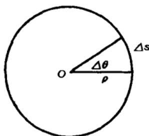


图 (5-3-3)

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\Delta\theta}{\Delta S}$$

于是当某一曲线在弧长 S_0 改变微小的 ΔS 时，这一小段弧 ΔS 可以近似地看成圆弧，并设所对圆心角为 $\Delta\theta$，如图(5-3-4)，而转向研究平均曲率

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta S}$$

同样，设想这一量在 $\Delta S\to 0$ 时，经历一无限变化过程，引入弧在 S_0 处瞬时曲率的概念，即曲率

$$k=\frac{1}{\rho}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta S}$$

其中 ρ 称为曲线弧在 S_0 处的曲率圆半径。这样一种处理，正是体现了通过圆的不变的弯曲度来认识和研究一般曲线不断变化的弯曲度。

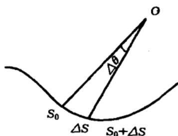


图 (5-3-4)

对曲线上某一点的曲率，实质上是求这一点的曲线的密切圆，以密切圆不变的曲率来刻画曲线这一点的曲率。

三、通过变量来研究常量

有一类数学问题的解答，是要求我们来计算出某一个确定的量，这种量在相应的问题中当然是个常量。但是这样的常量计算起

来，也并非都是轻而易举地作一些算术运算就可以完成的，有时要借助于甚至必须借助于使常量变动起来研究才能达到目的。实际是由于把常量看作是变量的暂驻状态来进行处理的。

例如微积分基本定理的建立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。

定积分中，$P = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 最初的意义表示一个由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$，$y=0$ 围成的曲边梯形的面积，是一个完全确定的常量。在证明过程中，我们用 x 代 b，由于 x 可以取各种不同的值，所以 P 就表示各种不同的面积了。于是使常量 P 变量化了，从而得到了一个关于 x 的函数

$$P(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

如果 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，我们可以证明，

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \quad \text{就是 } f(x) \text{ 的一个原函数}$$

即 $P(x)$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数。

因此，令 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的任一原函数，则应有

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + C$$

其中 C 是一个常数，这时我们把 $F(x)$ 中变数 x 用常数 a、b 来代替，使变量 $F(x)$ 再常量化。

以 a 代 x 有　$F(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t + C$

$\because \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$，$\therefore F(a) = C$

以 b 代 x　有

$$F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + C$$

$$= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + F(a)$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

我们求面积，求路程等问题，常需把常量看成变量的暂住状态或特定值，或变量在变化过程中的稳定趋势(极限值)，作为变量的对立物与变量构成一个统一体时，才能使问题获得解决，常数变易法也是一例。

例如，解微分方程中的常数变易法运用过程如下。

我们容易解一阶线性齐次方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$，那么，对一般的$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=f(x)$如何解呢？

解法是 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$$

积分后 $$\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln C^* \quad (C^* > 0)$$

$$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \qquad (C \neq 0)$$

对非齐次方程，把对应齐次方程的通解中的常数看成变数，设其解为

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

算出导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

代入原方程

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = f(x)$$

即
$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}=f(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

积分可得
$$C(x)=\int f(x)e^{P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1$$

因而
$$\begin{aligned}y&=C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\\&=C_1e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int f(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

再如轨迹交截法作图，一般思想是保留一部分条件，暂时丢开其他条件，使未知“点”少受限制，由定点变为满足一定限制的动点，得一轨迹；再保留另一部分条件，丢开其余条件，使未知“点”变成动点，从而得到另一个轨迹，两个轨迹的“交点”，就是所要求的点。这是初等几何作图中广泛应用的一个基本思想，在变动中确定固定位置。

例 1　已知$\triangle ABC$中，$\angle A=\alpha$，$BC=a$，AC边中线$BD=m_b$，求作$\triangle ABC$。

分析：如图(5-3-5)作$BC=a$，A点在以BC为弦含α角的弓形弧上，延长CB到E使$BE=BC=a$，A点在以E为圆心，$2m_b$为半径的圆上，所以A点在上述两个轨迹的交点处。

从而$\triangle ABC$可以作出。

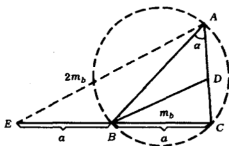


图 (5-3-5)

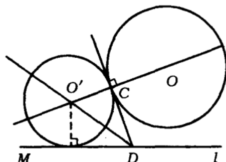


图 (5-3-6)

例 2　求作一圆，切于已知圆上的一个已知点C，且切于一已知直线l。

分析：如图(5-3-6)(1)一方面所作圆的圆心O'点应在OC上。

(2)另一方面,过 C 作⊙O 的切线交直线 l 于 D 点,O'应到$\angle CDM$ 两边等距离,O'点在$\angle CDM$ 的平分线上,故 O'点是$\angle CDM$ 的平分线与 OC 直线的交点。这时圆 O'可作出。

上述利用轨迹确定点的方法,就是乔治·波利亚《数学的发现》中的"双轨迹模型"。首先,把问题归结为要确定一个点。然后,把条件分成两部分。使得对每一部分,未知点都形成一个轨迹;而这两个轨迹的交点就是要确定的点。

思考题

1. 试由微积分基本定理的证明,分析通过变量研究常量的常数变易法。

2. 通过几何变换的不变性、曲线密切圆与曲率的关系分析如何用常量来刻画变量。

3. 举例说明轨迹法作图中体现的常与变的辩证关系。

第四节　有限与无限

希尔伯特在《论无限》的讲演中谈到,"没有任何其他的问题能像无限那样,从来就深深地触动着人的情感。没有任何其他的观念能像无限那样,对人的理智起了如此激励和有成效的作用。然而也没有任何其他的概念,能像无限那样需要加以阐明了。"

关于无限本质的阐明,远远超出了专业科学的范围,而成为人类理智的荣誉本身所应做的事情,我们只能就数学中所涉及的有限与无限的矛盾来谈一些认识,并且可能是正在探讨中的认识。

物质、运动、时间、空间,从量的方面来说都是有限与无限的对立统一。

任何事物,在其运动、变化、发展的历史上,经历的时间是有限的,占据的空间是有限的,它所具有的质量也是有限的。但从整个物质世界来看,正是这一切有限组成了宇宙演化的长河与

无穷无尽的广延。此外，从深入到物质结构来看，任一有限物体又可分解为分子、原子等等一系列层次，是无限可分的。因此，任何特定的有限均被超越而表现为在时间上、空间上的无限性。

现实世界中量的有限与无限，反映到人们的头脑中，经过思维的加工，构成数学上的有限与无限。所谓有限，总是给出了一定的界限，这个界限同时又成为被超越的目标。目标一经超越，它就失去了界限的作用，但是同时又产生了新的界限。也就是又成为新的被超越的目标，于是又重复同样的过程。有限自身的这种矛盾，促使有限朝着无限的方向发展。

例如，自然数从 1 开始，超越 1 得 2，超越 2 得 3，如此等等。由此产生的每个自然数都是有限的，但是由此产生的每个自然数作为设定的界限又都是被超越的。因此自然数列无限延伸，在有限发展过程中形成了自然数个数无限多的概念。

又如，一条线段，其长度是有限的，但是它又可以延长为更长的线段，并且延长的次数没有限制，延长的长度也没有限制。于是从有限长的线段的概念，发展出无限的直线的概念。反过来，一条确定的线段，可以截去一半，这个界限还可以被超越，即对剩下部分还可以再截去它的一半，这样的过程，可以无休止地进行下去。这正是我国古代“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的朴素的无限分割的思想，每次的界限均为有限，界限无休止地被超越，最后得到了一个自身不能被超越的东西，就是无限。

在数学中，无限的表现形式有三，其一，量上的无限多。如自然数集元素无限多，是作为有限的“总和”而存在的，也被称为实无限。其二，是无限远。如两条平行线无限延长永不相交，即讲的“无限远”。这样引入了无穷远点、无穷远直线等理想元素。作为研究空间形式的几何学，可以而且应该提出一些模型，对无限远点作一些模拟和假想，以便近似地或从某个侧面反映人们对空间无限远处的认识。其三，无限逼近，表现为一个变化的过程，这里涉及到一系列关于无限的运算，这种无限性有时也称作潜无

限。

一、有限与无限的质的差异

从有限发展到无限，是认识上的一次重大飞跃。这种质的差异，表现在有限量之间的关系对无限量不再保持。

例 1. 当 x 是有限数时，$x+1\neq x$，或 $x+1>x$，但当 x 是无穷大时，$x+1=x$（$\infty+1$ 仍是无穷大）自身不能被超越了！

例 2. 一个有限集合与它的真子集之间都不能建立一一对应关系，这是因为有限集合与它的真子集的元素个数不相等。但对无限集合中就不完全是这样，比如自然数集 N 就可以和它的真子集偶数集建立一一对应关系，也可以与它的真子集平方数集建立一一对应关系，甚至我们可以建立正有理数集与它的真子集自然数集 N 之间的一一对应关系。

据说，希尔伯特曾在一篇讨论无穷大的讲演中，这样通俗地叙述了无穷大的性质："我们设想有一家旅店，内设有限个房间，而所有的房间都已客满，这时来了位新客，想订个房间。'对不起'，旅店主说：'所有的房间都住满了'。现在再设想另一家旅店，内设无限个房间，所有房间也都客满了，这时也有一位新客来临，想订个房间，'不成问题'旅店主说，接着，他就把 1 号房间里的旅客移至 2 号房间，2 号房间的旅客移到 3 号房间，3 号房间的旅客移到 4 号房间，等等，这一来，新客就住进了已被腾出的 1 号房间。

我们再设想一座有无限个房间的旅店，每个房间也都住满了，这时，又来了无穷多位要求订房间的客人。'好的，先生们，请等一会儿'旅店主说，他把一号房间的旅客移到二号房间，二号房间的旅客移到四号房间，三号房间的旅客移到六号房间，等等，等等。现在，所有单号房间都腾出来了，新来的无穷多位客人可以住进去了。"

这个生动的比喻，形象地揭示了有限与无限的质的差异。

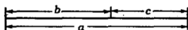


图 (5-4-1)

例 3. 如图 (5-4-1) 线段 a 和它的一部分——线段 b 上的点一样多吗？

若以长度而论，a 显然比 b 长，并且就长出线段 c 那么长。但是，若考察 a 上的点与 b 上的点，我们却可以在它们之间建立一一对应的关系，见图 (5-4-2)。其所以产生这种情况，就是由于有限与无限有质的差异。线段 a 和 b，长度都是有限的，哪个长哪个短比较后即可知，但线段 a 和 b 上点的个数，却都是无限的。在这时就不能因为线段 b 比线段 a 短，而认为线段 a 上的点和线段 b 上的点不一样多！

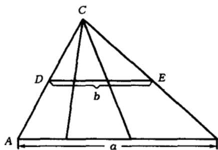


图 (5-4-2)

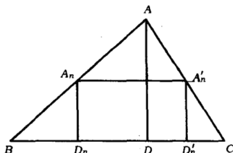


图 (5-4-3)

同样，图 (5-4-3) 中，$\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 面积不等，但它们中的与 AD 平行的线段等长，且“条数”一样多。

例 4. 任意有限量 a 和任意大的数 b，总存在自然数 n，使得 $na>b$，这是著名的阿基米德公理。

但对无穷小量 δ 和 1，则对任何有限的 n 都有 $n\delta<1$，此时阿基米德公理就不适用了。

在高等数学学习中特别要注意有限与无限性质间的差异。如一个连续函数在任何有限区间上都是可积分的，但不能断定它在无限区间上也是可积的。再如，一元函数与多元函数的极限问题，我们知道两者的区别很大。处理多元函数的极限问题要复杂得多，其中一个本质性原因就是一元函数的极限只涉及两个方向(左、右

极限)，而多元函数的极限要涉及无限多个方向，这也是有限与无限质的不同的反映。

又如对于数的有限和式的运算，我们知道它是满足诸如结合律、交换律以及分配律等等。但是在无限多项的求和式中，就不能任意运用这些定律，否则将导致谬误的结论。例如下述运算：

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{7}\right)+\cdots \\ &= 1-\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{4}{7}-\frac{4}{7}\right)-\cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

其中第三步是不允许的，实际上正确运算的结果是 $S=\frac{1}{2}$。

再如 $$\lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}_{3个}\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

但 $$\lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n个}\Big)=1$$

这表明，极限运算与无限性相联系，不能把极限运算简单地“分配”到括号里面去。

通过上述诸例，可以帮我们理解什么是无限，无限与有限的本质差异。

二、数学中有限与无限的联系与转化

1. *在数学中从有限发展到无限是认识过程的深化。*“在数学上，为了达到不确定的、无限的东西，必须从确定的、有限的东西出发”。[1]

例 1. 无穷级数求和。

---

[1] 恩格斯：《反杜林论》人民出版社，1970 年版，第 48 页。

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots \quad (*)$$

为了计算无限和，先计算有限项的和。

令 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，$S$ 是个有限数，则 S 就定义为无穷级数（$*$）之和。

其和是由部分和（有限和）开始，然后求极限而得到的。

实际上，$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

……

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

……

每个 S_i 都是有限数，是一个界限，但又是可以超越的界限，最后达到的“无限”是一个不能“超越”的界限，是个“超越仍是其自身的东西”。

例 2. 人们对圆周率的认识也是从有限入手深入到无限的例子。中国古代刘徽首创的“割圆术”就蕴含着从有限到无限的思想。刘徽是在证明“半周乘半径得积步”这一圆面积公式时，首先从圆内接正 6 边形开始割圆，得到正 12 边形，以圆内接正 6 边形每边长 l_0 乘半径 r，计算出圆内接正 12 边形面积 $S_1 = 3l_0r$；再割成正 24 边形，其面积 $S_2 = 6l_1r$，如此下去，割得越细，圆内接正 $6 \cdot 2^n$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）边形的面积 S_n 与圆面积之差 $S - S_n$ 就越小，割之又割，割到不可再割的地步，则圆内接正多边形便与圆周合为一体，其面积不再小于圆面积。这显然是一个极限过程，用现代符号表之，便是

$$\lim_{n\to\infty} 6 \cdot 2^n l_n = l$$

此时

$$\lim_{n\to\infty} (S - S_n) = 0$$

这正是“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”的基本思想，刘徽正是通过有限的东西利用极限这一思想，在无限的过程中证明了圆面积公式，并随之指出

"圆周率""非周三径一之率也"。

例 3. 数学归纳法的实质，是人们用有限认识无限的一种方法。凡涉及对任意自然数 n 都成立的命题 $P(1), P(2), P(3), \cdots, P(n), \cdots$ 这是无穷的命题列，要一个一个地去验证永世证不完竭，人们是如何通过有限来把握无限，实现对这无穷多个命题的证明的呢？

(1)从有限入手，验证 $P(1), P(2)$，为真；

(2)假设 $n=k$ 时 $P(k)$ 真 $\Rightarrow n=k+1$ 时 $P(k+1)$ 真。

这样，证明了从 $P(k)$ 到 $P(k+1)$ 的转化环节，从而论证了这无限多个命题的正确性。

2. *数学中极限概念是对量变过程的无限性的恰当的描述。*有限与无限的转化成为数学应用于实际的有力手段，这一转化的恰当描述就是极限概念，至少对量变过程的无限性描述来说是如此。

例　我们分析 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 中，如何实现有限与无限的转化。

这一极限式包含两个内容：其一，过程 n 无限增大而不终止；其二，过程 x_n 随 n 增大而有总的趋势(稳定于 a 值)，也就是在这一过程中，x_n 可以达到这样一个阶段，使 x_n 与 a 之间任何(预先)确定的偏差界限 $\varepsilon>0$ 均可被克服(超越)，而 x_n 无限地靠近 a。也就是说，从无限过程 x_n 看，可以研究它的稳定趋势是什么？如果是 a，那么 $x_n = a + 0(1)(n\to\infty)$。也就是说有限值 a 已把握住变量 x_n 的主要部分，有了 a，就认识了 x_n 的无限变化过程，就是通过有限来把握无限的过程。

另一方面，为了认识有限的 a，由于 x_n 的极限是 a，可以通过对 x_n 的研究而达于 a 的认识，也就是把 a 转化成无限的过程，其实我们对 $\sqrt{2}$，对 π 的把握都是这样的。

3. *通过无限可以进一步认识有限。*在数学中我们常把一个有限的数表示为无限多种形式，如 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\cdots$ 这已经是一种无限性的关系了。$\sqrt{2}=1.4142\cdots$ 正体现了左边有限形式与右边无

限形式之间的统一。

例　函数 $f(x)$ 的泰勒展开式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h+\cdots+\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k+\cdots$$

左边是有限形式，右边是无限形式；

左边是简单形式，右边是整体复杂形式；

左边整体未知，右边每一项都是已知的。

利用泰勒展开式，由 $f(x)$ 来计算 $f(x+h)$，正是通过等式右边每一个已知项，在无限的过程中来把握左边 $f(x+h)$ 的。函数 $f(x)$ 没有幂次，而级数展开中却包含了所有幂次（两极相通）。这无论在认识函数性质和近似计算中都有极大的好处。“把某个确定的数，例如把一个二项式化为无穷级数。即化为某种不确定的东西，从常识来说，这是荒谬的举动。但是，如果没有无穷级数和二项式定理。那我们能走多远呢？”[1] 确实如此，这种常识看来荒谬之举却对数学发展有重大作用。由于创立了二项式定理和无限理论而创立了科学的数学。

例 2. 在工程计算中，利用无穷级数展开进行近似计算并制成函数表，把表示成有限形式的函数转化为无限的形式——无穷级数。这样就便于进行数值计算，得到结果又转化为有限的形式，经历了一个否定之否定的过程。

例 3. 我们在实验中得到数据，在平面直角坐标系中描出有限个点，然后通过一定的方法画出经验曲线，这条曲线已经由无限个点组成，再由经验曲线得出经验公式。这样就从有限中综合出了无限性的规律，然后再由经验公式可以具体解决某些特殊点的数值，又回到有限，这也是一次否定之否定的认识过程。

在解题中也会遇到下面这类有限与无限关系的问题。

例 4. 计算　$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$

〔1〕 恩格斯：《自然辩证法》人民出版社，1971 年版，第 241 页。

解：令 $$y=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

则 $$y=\sqrt{1+y}$$

$$y^2=1+y$$

$$y^2-y-1=0$$

解得，取正根 $$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

这其中 y 取有限形式，通过有限与无限的转化实现了解题的目的。

再如，解方程

$$y=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+y}}}$$

有限转化为无限，即 $$y=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

即 $y=1+\frac{1}{y}$ 这时无限又化为有限

$y^2-y-1=0$，解得取正根，$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

再如，关于证明“存在无穷多个”这种无限性的问题，其反面就是“有限”，有限自然比无限更具体。因此，很多时候人们正是通过“无限”的反面——有限来论证无限，经常用反证法来实现这一点。

例 5. n 为自然数，证明，形如 $4n+3$ 的质数有无限多个。

证明：由若干个 $4n+1$ 型的数相乘其积仍是 $4n+1$ 型的数。所以 $4n+3$ 型的合数的质因数中至少有一个为 $4n+3$ 型的数。

设 形如 $4n+3$ 型的质数只有 k 个

$$P_1,P_2,P_3,\cdots,P_k,$$

造一形如

$N=4P_1P_2\cdots P_k+3$ 的数

注意,因为 $n\in N$,$4n+3\geqslant 7$,所以 $P_i\geqslant 7$

因此 N 不被 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 每一个整除。即 P_k 都不是 N 的质因数。

若 N 为合数,N 的质因数至少有一个 $4n+3$ 型的数。但 $P_i(i=1,2,\cdots,k)$均不是 N 的质因数。所以必有一个 P_k 以外的质数 P 存在,这与只能有 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 这 k 个质数矛盾。

若 N 本身就是质数,当然 N 与每个 P_i 都不相同,所以 N 也是异于 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 的质数,这也与只有 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 这 k 个质数的假设相矛盾。所以形如 $4n+3$ 的质数有无限多个。

思考题

1. 极限概念中如何体现了有限与无限的辩证关系?

2. 通过导数概念分析有限化为无限,又从无限认识有限的过程。

3. 解方程 $x=\sqrt{72-\sqrt{72-\sqrt{72-\sqrt{72-\sqrt{72-x}}}}}$ 试说明,在解的过程中如何运用有限与无限转化的思想进行分析操作的?

第五节　连续与不连续

在数学中,无论是描述相对静止状态的量,还是描述运动变化状态的数量,都存在着两种情况:连续与不连续。连续与不连续是数学研究中的重要矛盾之一,它们既有本质的差异,又在一定条件下可以互相转化,相对静止状态下的数量和运动变化状态下的数量,因其着眼点不同,还有加以区分的必要,对前者矛盾形式为连续与离散,对后者为连续与间断。

一、连续与离散

我们知道，世界上有些事物是不可分解的，也就是说，如果将它进行分解，就要发生事物性质的改变。例如计算某种产品的数量，显然，作为产品，半个是没有意义的，这种不可分解的事物在数学上就作为一个单位存在，而运算过程就在离散数量的状态中进行。然而也有些事物是可分解的，也就是说，如果将它进行分解，并不会改变事物的主要规定性。例如，计算一个物体的体积，在这里，计算的对象是物体所占有的空间的大小。并不涉及该种物体具体质的特性，它的任何局部仍是该物之部分所占有的空间的大小。因此，虽然物体本身并非是一部分一部分地合并起来的，但是却可以被分解、合成而不影响其主要性质。这样，为了能精确地表达诸如物体体积之类的量，实现其无限可分的性质，在数学的抽象中就需要引入连续量的模型。在这个意义上可见，数量的连续状态是事物无限可分性的反映和要求。当人们提问容器中有几个苹果和有多少牛奶时，这“几个”、“多少”已经表明提问者将离散量与连续量加以区分了。

数学研究从离散量进入连续量，是对客观事物的深入分析得到的，是事物不可分性与可分性的反映。

例 1. 实数连续统的建立。

我们知道，有理数虽然很稠密，但它不能与数轴上的点一一对应，因为有限长度的线段（如单位正方形的对角线长）却不能用有理数表示。这表明有理数集填不满数轴，依然有许多空隙，千窗百孔，这样，就使直线不能仅在有理点的条件下任意分割。为了克服这一障碍，必须引进无理数建立实数连续统，奠定研究连续量的基础，使直线成为一数轴而无限可分。形象地说，对数轴任意砍一刀，一定会砍在某个实数上，砍的地方不会是什么数也没有的空隙，这恰反映了实数的连续性。戴德金分割是这一思想的最形象的数学刻画。

将一切有理数分为两大类 A 与 B，B 中任一元均大于 A 中任一元，这样就会出现以下三种情况：

1°. A 中有最大元 r，而 B 中没有最小元；

2°. A 中没有最大元，而 B 中有最小元 r；

3°. A 中没有最大元，且 B 中也没有最小元。

须要说明，在逻辑上还有 A 中有最大元且 B 中也有最小元的可能，利用有理数的稠密性，极易证明，这种情况实际上不能存在。

1°，2°分割产生有理数，3°就规定一个无理数。

例如：A：{一切 $a^2<2$ 的正有理数，0，一切负有理数}

　　　B：{一切 $a'^2>2$ 的正有理数}

这是一个戴德金分割，A 为下类，B 为上类，我们证明，A 中无最大数。

设 a 是 A 中任一正数（$a^2<2$），我们可以选择这样的 n，使得 $\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2$ 也就是 $a+\frac{1}{n}$ 属于下类 A。

其实，若要 $\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2$

只须　$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2$

只须　$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2-a^2$

只须　$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n}<2-a^2$ 即可

只须　$\frac{2a+1}{n}<2-a^2$

只须　$n>\frac{2a+1}{2-a^2}$ 即可。

所以不论 a 是 A 类中怎样的数，总能找到 $n>\frac{2a+1}{2-a^2}$，使 $a+\frac{1}{n}\in A$。这说明 A 中无最大数。

同理可证，B 中无最小数。这样一个分割定义了无理数 $\sqrt{2}$。形象地说，用上面的方法引入无理数后，对于数直线的任何分割都不再出现空隙。因此，戴德金分割思想建立实数连续统与无限可分性有着内在的联系。

在数学中，连续与离散之间也是在一定条件下可以互相转化的。微积分中建立实数连续统的另一种方法——柯西基本列收敛法，正是这一转化的具体体现。因此，从离散过渡到连续，或从离散认识连续，极限工具正是创造了这样一种转化条件。

例 1. 如果一条连续曲线 $y=f(x)$，只要间隔取得足够小，可用其上之一系列离散点值之折线（或切线）的连线来代替。这正是计算机控制切割机床加工曲边机械零件的基本思想。

例 2. 画面是连续分布的，但电视机上的画面是由点阵组成的，计算机打印的文字也是由点阵组成的，这正是用离散量来逼近连续量的具体体现。

例 3. 在数学中怎样用连续量去概括离散的量和怎样用离散量去逼近连续量这是一个问题的两个方面。比如我们可以用格点来计算图形面积：一个凸多边形，面积为 A，内部格点数为 N，边上格点数为 L，则 $A=N+\frac{L}{2}-1$。这就是利用格点计算多边形面积的毕卡公式。

例 4. 数学中现在正在发展一种离散化的方法。

在数值计算中，为了计算连续的量值，不得不诉诸于不连续的办法——用离散去代替连续。离散化方法主要有：

第一类：用求出未知函数在若干点上的数值来近似地得到此函数，其基本方法就是以有限差分代替无限小的微分；以有限和代替无限求和的积分，计算积分的梯形公式，辛卜生公式等，求常微分方程的折线法，求偏微分方程的差分法等都属此类。

如解波阿松方程第一边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)(\Omega_i \quad 0<x,y<1)\\ u=\bar{u} \qquad (\text{区域边界 } \Gamma \text{ 上})\end{cases}$$

作平行于坐标轴间隔为 $h=\dfrac{1}{N}$ 的两族直线。交点为网格点，如图(5-5-1)：

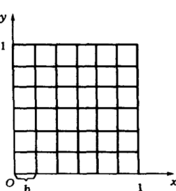


图 (5-5-1)

$$(x_i,y_k)=(ih,kh)$$

u 在这些点上的值记为

$$u_{ik}=u(x_i,y_k)$$

在方程中近似用差商代替偏导数

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,k}=\frac{u_{i-1,k}-2u_{i,k}+u_{i+1,k}}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,k}=\frac{u_{i,k-1}-2u_{i,k}+u_{i,k+1}}{h^2}$$

得到 $u_{i,k}$ 近似满足线性代数方程组

$$u_{i+1,k}+u_{i-1,k}+u_{i,k+1}+u_{i,k-1}-4u_{i,k}=h^2 f_{i,k}$$
$$(i,k=1,2,\cdots,N-1)$$

$$u_{i,0}=\bar{u}_{i,0},u_{i,N}=\bar{u}_{i,N} \qquad (i=0,1,\cdots,N)$$

$$u_{0,k}=\bar{u}_{0,k},u_{N,k}=\bar{u}_{N,k} \qquad (k=0,1,\cdots,N)$$

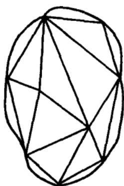
解此方程组，可求得 $u_{i,k}$ 的近似值。

第二类离散化方法是把未知函数表为有限个已知函数的和。

$$u(x,y)=c_1\varphi_1(x,y)+c_2\varphi_2(x,y)+\cdots+c_n\varphi_n(x,y)$$

这种方法一般是基于变分法的基础上的。

由于电子计算机的出现，将第一类、第二类方法结合，产生与发展了一类新的离散化方法，即有限单元法，有限单元法和第二类方法一样，是从变分原理出发的，它又和差分法相似，把定解区域划分为一些网格，如图(5-5-2)，每个网格称为一个“单元”，但有限元法与古典变分法不同之处，是它不再用一个全区域上统一的函数，而是在每个单元上引进未知函数的插值函数，在单元的边界上



图(5-5-2)

满足一定的连续性条件。即整个解是由分片定义的函数构成的，它与差分法不同之点是网格完全是任意的。这样，有限单元法就结合了两种方法的优点，使它具有特别大的灵活性与适应性，对于几何形状比较复杂的问题和物理条件比较复杂的问题，它处理起来尤其是得心应手。并且最大的优点是实现完全的程序标准化，便于计算。

下面我们再看由连续来概括离散的作用：

例 5. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$的值。

解：
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$
$$=\ln|1+x|\,|_0^1$$
$$=\ln 2$$

这是在运算中发现一个式子正是$y=\frac{1}{1+x}$在[0,1]上的积分和的形式，所以转化为连续问题求解。

例 6. 判定离散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$的敛散性，其中$f(x)(x>0)$是非负单调减函数，则可归结为对积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$的研究。

$f(x)$是当$x\geqslant a$上一个单调不增的连续函数，则级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(a+k)$与积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$敛散性相同，如图(5-5-3)。



图(5-5-3)

$$f(a+k) \geqslant \int_{a+k}^{a+k+1} f(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a+k+1)$$

$$\therefore \quad \sum_{k=0}^{n} f(a+k) \geqslant \int_{a}^{a+n+1} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=0}^{n} f(a+k+1) \qquad (*)$$

这就表明 $f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\cdots+f(a+k)+\cdots$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 敛散性相同。

由(*)左边知，若积分发散则级数发散，若级数收敛则积分收敛。

由(*)右边知，若积分收敛则级数收敛，若级数发散，则积分发散。

另外，数论是研究离散量——整数性质的。然而解析数论这一重要的数学分支是采用数学分析方法来研究数论的，即化离散为连续，再由函数连续性探讨离散量的性质。

二、连续与间断

连续与不连续是一对矛盾。在对数量局部变化的研究中，又表现为连续与间断的形式。例如气温在某一温度的上、下变化是连续的，而一电路在接通前后的电压数值改变是由 $V=0$ 突然增大，说明电压在此刻发生间断性改变。前者表明事物运动过程的渐变性，后者表明事物运动过程的突变性。自然，这两种数量变化在局部的不同性态，也是人们对事物运动过程认识的一定反映，是客观实际

的一种抽象。

连续与间断带来函数性质的显著差异。如闭区间上的连续函数,可取到一切中间值,可达到最大值与最小值等等。而间断函数一般无此性质。

对黎曼积分,一个函数的不连续点必须有一定限制(不连续点集合的勒贝格测度等于0),才是可积的。这使得一些形式并不复杂的函数,例如[0,1]上定义的迪里赫勒函数。

$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 是}[0,1]\text{上的有理数}\\ 0 & x\text{ 是}[0,1]\text{上的无理数}\end{cases}$都成为不可积的了。因而对于有相当一大类函数,就不能运用黎曼意义下的积分工具来研究。这一缺欠被进一步发展的勒贝格积分理论所克服。

为了解决连续与间断这一差异性所引起的矛盾,在数学中创造了各种方法和途径,它们不仅推动了数学的发展,而且进一步促进了对连续性与间断性本质的认识。其中极限仍然是连续与间断相互转化的基本工具。

例 1. 可去间断点

如一个函数在(a,b)连续,且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$及$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在,则重新定义$f(b)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$,$f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$,致使改造后的函数$f(x)$成为在$[a,b]$上的连续函数,进而通过对后者的研究,达到对原来在$(a,b)$定义的$f(x)$性态的认识。此外对可去奇点的处理也与此相似。

又如图(5-5-4)所示:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

可去掉间断点,用$f(x)=x^2$来研究其性态。

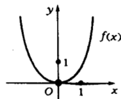


图 (5-5-4)

随着数学的发展,对数量变化的这种连续性与间断性的认识也在不断深化,其抽象形式也是多种多

样的。

例 2. 对连续函数 $f(x)$本身，我们还可以进一步对其连续程度作不同的分析，如 $y=f(x)$可以有导数，甚至导数也连续，这表明曲线 $y=f(x)$的光滑性。但导函数也可能出现间断，即不光滑等，这时仍会产生某种连续与间断的矛盾。由于微分是研究函数性质的有力工具。因此必须在数学理论内部寻求解决这一矛盾的方法。

例如　可以改造原来的微分概念，换成较弱的条件，如引进

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=Df(x)$$

使原来的 $f(x)$在这一推广了的导数意义下去掉间断性。

再如，可以引进光滑核

$$K(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x^2-a^2}} & |x|<a\\ 0 & |x|\geqslant a\end{cases}$$

而转化为研究积分

$$(K*f)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-x')f(x')\mathrm{d}x'$$

由此来探求 $f(x)$的性质。

以上举例，多属于分析数学，而连续性的描述均建立于较直观的距离观念之上，随着数学的深入发展，数量关系与空间形式的连续性刻画也更加抽象和深刻。如对一般映射(函数概念的拓广)概念，在更广的拓扑空间中，用邻域(开集)来描述连续性，这些都表明对连续性的更本质的认识，这就需要在更高的数学抽象中进行研究了。

思考题

1. 对任意图形的面积可以采用画方格估值的“数方格估积法”，试分析其中体现的连续与离散的相互转化。

2. 若 $f(x)(x>0)$ 是非负单调减函数。通过 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 和 $\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 敛散性的相互关系说明连续与离散的相互关系。

第六章

数学的发现

第一节 数学规律的探索

数学形成体系或写出证明时,条理清晰,逻辑严谨。那么,数学规律是如何找到的呢?数学的证明是怎样发现的呢?现在,我们介绍在数学真理探求过程中还有着不严格或不甚严格的一方面。在这个过程中虽然也要运用逻辑推理,但这只是一种合情推理。可见,严格的数学规律的发现与证明往往要经历一个不甚严格的过程。正如大数学家高斯所说:“瑰丽的大厦建成后,应拆除杂乱无章的脚手架。”因此,高斯的论文集中定理的论证都经过他反复推敲而达到完美的程度,并将论证过程的细微末节琢磨殆尽,剩下的就是精炼完美的结构了。这样的结果使别人读起他的著作来往往感到困难。在数学研究中,思想和方法常常比由之发展而成的定理重要得多。一个真正良好的思想可以引申到若干领域中去。产生不

可预料的结果。但是数学的专著由于其严格与简练已经把探索定理,发现证明的思路作为大厦的脚手架拆除了,把证明中的思想方法作为建筑图纸收在档案中或被抛弃了。正如高斯同时代的 Jacobi 谈论高斯时所说:"他的证明是僵硬地冻结着的,人们必须首先将它们溶化出来。"另一位同时代的数学家 Niels Henrik Abel 说:"高斯像只狐狸,用尾巴扫砂子来掩盖自己的足迹。"Abel 说:"在我看来,一个人如果要在数学上有所进步,他必须向大师们学习,而不应向徒弟们学习。"这话很有道理。向大师们学习什么?主要学习数学研究中的思想与方法,探索数学规律与证明的方法。从而提高自己分析问题与解决问题的能力。然而,数学家著作中这些思想与方法常常是被凝固在简练的证明之中。建起大厦的杂乱无章的脚手架已经拆除,探索的足迹已经被掩盖掉了。因此我们就需要把凝固的东西熔化开来,恢复建筑物的蓝图,找到数学家们探索的足迹!

一、从简单、个别入手探求一般的规律

这个问题包括两个方面。其一,由个别入手经过试验用不完全归纳法提出一个命题;诸如哥德巴赫猜想的发现,我们下节再讲。其二,主要指命题已经确定,在探索定理证明过程中所运用的方法。这是我们本节要讲的,现举例说明。

例 1. 两个人轮流在圆桌上摆放同样大小的硬币,每次摆一个。硬币彼此不能互相重叠,也不能有一部分在桌面边缘以外。谁先摆不下硬币谁就算输。试证,先摆硬币的人有办法使对方必定输。

思考:若圆桌恰与硬币大小一样,先摆必胜。这因为把硬币摆在桌面中心之故。这种特殊个别的情况包含着一般,它又是一般的简化。

解:先摆的人可以把第一个硬币摆在桌面的中心,由于桌面是中心对称图形,此后不管对方把硬币摆在哪里,先摆的人总可以把

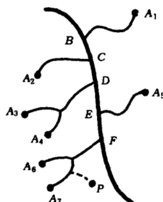


图 (6-1-1)

硬币摆在与对方所放硬币对称的位置。这样一来先摆不下的一定是对方。因此，先摆硬币的人必胜。

例 2. 如图(6-1-1)，一个工厂区地图，粗线是大公路，七个工厂 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，A_7 分布在公路两侧，有一些小公路与大公路相连。现要在大公路上设一长途汽车站，车站到各工厂(沿小公路走)的距离总和越小越好。问这个车站设在什么地方最好？如果在 P 的地方又建了一个工厂，并且沿着图上的虚线修了小公路，那么这时车站设在什么地方最好？

解：(1)简化。仔细分析，小公路是由工厂到车站必行之路。从各工厂沿小公路到路口路程总和是定值，所以只要研究车站设于何处，各路口到它的距离总和最小就可以了。

(2)简单情况入手。

两个路口的情况如图(6-1-2)：

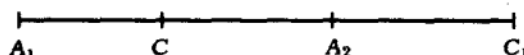


图 (6-1-2)

显然车站设在 A_1A_2 上任一点 C(包括端点)，由车站到路口路程总和为 $A_1C+CA_2=A_1A_2$ 为定值。若车站设在 A_1A_2 延长线上 C_1 点，则有 $C_1A_1+C_1A_2>A_1A_2$，可见，两个路口时车站设于两路口或其间任意一点均可。

三个路口的情形如图(6-1-3)：

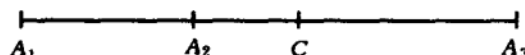


图 (6-1-3)

A_1，A_2 是两个路口，依两个路口讨论的结论，车站可设 A_1A_2

上任一点，A_2A_3 也是两个路口，车站可设 A_2A_3 上任一点，显然共同点为 A_2，即设于 A_2 最好。

$$\begin{aligned}CA_1+CA_2+CA_3&=A_1A_2+CA_2+A_2A_3\\&=(A_1A_2+A_2A_3)+CA_2\\&=A_1A_3+CA_2\end{aligned}$$

A_1A_3 为定值，当 $CA_2=0$ 时最好，即车站设于 A_2 最好。

依次继续下去，可以发现一个规律：

若路口为偶数 $2n$ 个，$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{2n}$，则在 A_nA_{n+1} 上任一点设站均可。

若路口为奇数 $2n+1$ 个，$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{2n+1}$，这时车站设在第 $n+1$ 个路口最好。

我们不难用数学归纳法证明上述规律的正确性。(证明略)这样我们找到了一般规律，解法也就一目了然了。

七个工厂时通向主干公路看成七个路口，可见，车站设在第四个路口 D 最好。

加一个工厂 P，变成八个工厂，看成八个路口，车站设在第四、五个路口 D，E 或 DE 之间均可。

例 3. 一笔画问题。

欧拉(Euler)把哥尼斯堡七桥问题首先简化为一个图形能否一笔画，如图(6-1-4)然后从简单情况入手分析，找规律。



图 (6-1-4)

区分奇偶点，找出规律：图形中的点都是偶点或仅有两个奇点时，该图形可以一笔画。数学中这种例子还很多，我们就不一一列举了。

这种方法主要运用了个别与一般的辩证关系。正如列宁所说："一般只能在个别中存在，只能通过个别而存在。任何个别(不论怎

样)都是一般”。[1] 这表明,要寻找一般可以而且必须从个别中去发掘。要善于从个别情况分析中抓住普遍性和一般的规律。这是因为个别的形式不但在内容上包含着一般,而且还包含着解决一般的方法。至于如何从个别情况入手抓住一般,抓住怎样的一般,这要靠经验与洞察力。

二、运用联想与类比进行大胆试探的方法

Horace Lamb 说:“一个不亲自检查桥梁每一部分的坚固性就不过桥的旅行者,是不可能走远的。甚至在数学中,有些事情亦须冒险。”[2]

例 1. 研究数列　1,1,2,3,5,8,13,21,…。

$F_1=1$, $F_2=1$　$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$

这是著名的斐波那契数列。据说是 13 世纪意大利数学家斐波那契(Fibonacci)研究下面有趣问题中提出的。设一对大兔子每月能生出一对小兔子,而每对小兔子过一月就能成长为一对大兔子,如果不发生死亡,问由一对大兔子开始,一年后能有多少对大兔子?

第一月	第二月	第三月	第四月	第五月	第六月
A	Aa	Aa	Aa	Aa	Aa
		A	A	A	A
			Aa	Aa	Aa
				Aa	Aa
				A	Aa
					Aa
					A
					Aa
1	1	2	3	5	8

---

[1] 《列宁全集》人民出版社,1963 年版,第 38 卷,第 409 页。

[2] M·克莱因《古今数学思想》第一册,上海科学技术出版社,1979 年版,第 199 页。

表中：A……一对大兔子。a……一对小兔子。

这样一直数下去，可得 $F_{13}=233$，……等等。

问题是：数列的通项公式怎么求呢？

当时等差、等比级数公式都已经有了，所以数学家大胆地把这个数列作为等比数列进行探索，由于这一步大胆的尝试，找到了斐婆那契数列的通项公式：

$$\because \quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

即：1，1，2，3，5，8，13，21，… $(n=1, 2, 3, \cdots)$

将它看成：$q, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6, q^7, q^8, \cdots$

于是有

$$q^{n+2}=q^{n+1}+q^n$$

$$\therefore \quad q^2=1+q$$

解得 $q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

因此 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 与 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 满足关系式 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$。

令

$$F_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

不难看出，它也满足关系式 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$。

问题是，选择恰当的 c_1, c_2，使 $F_1=1, F_2=1$

即

$$1=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

解得

$$c_1=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad c_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

于是 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n-\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n\right)$

例 2. 欧拉计算

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}。$$

是一个类推与发明之间极好的例子。

伯努利(Jacob Bernoulli 瑞士数学家 1654－1705 年)发现了若干无穷级数之和，但对于

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\cdots$$

却没求出来。他曾写道："如果有人成功，请将其发现告诉我们，我们会衷心感激的。"

这个问题引起了另一位瑞士数学家欧拉(1707－1783 年)的注意。欧拉用试验的方法算出了和式的七位有效数字 1.644934，但是这只是一个近似值，而目的在于求精确值。这个值与$\frac{\pi^2}{6}$很接近。所以他用一个大胆的方法来证明这个值等于$\frac{\pi^2}{6}$。

(1)欧拉应用 n 次方程有 n 个根的初等代数知识

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$$

有 n 个不同的根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$。

则

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx_n=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

比较上式两边 x^{n-1}的系数，得

$$a_{n-1}=-a_n(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$$

此外当诸 $a_i\neq 0$ 时，有另一种因式分解法·

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=a_0\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)。$$

比较系数可得

$$a_1=-a_0\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)$$

如果方程为 $2n$ 次幂，即

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^nb_nx^{2n}=0$$

有 $2n$ 个不同的根：

$$\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2, \cdots, \beta_n, -\beta_n$$

因此

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^n b_n x^{2n}$$
$$=b_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\beta_n^2}\right)$$

又

$$b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\cdots+\frac{1}{\beta_n^2}\right)$$

(2)欧拉认为方程式 $\sin x=0$ 或

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=0$$

左边有无限多项,所以欧拉认为它应有无限个根:

$$0,\ \pi,-\pi,\ 2\pi,\ -2\pi,\ 3\pi,\ -3\pi,\cdots。$$

欧拉摒弃 0 根,他用 x 去除方程两边,得

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=0$$

根为 $\pi,\ -\pi,\ 2\pi,\ -2\pi,\ 3\pi,\ -3\pi,\cdots$。

所以,欧拉大胆地用类推得出结论:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

故

$$\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots$$

即

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

就这样,求出了伯努利费尽心血没能解决的一个级数的和。欧拉本人也很清楚,这个解法是大胆的。十年以后他写道:“这个方法是新的,从未为此目的使用过”。欧拉及许多人都知道这个推理是不严格的,但用这个方法还求出了许多其他级数之和。如:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

直到晚些时候,欧拉才把证明严格化了。

欧拉的决定步骤是大胆的，在严格的逻辑上是完全错误的。他把一个关于代数方程的法则应用到一个非代数方程上去，把有限个根推广到无限个根上去，严格说来是不正确的。但他使用了类比推理而取得了成功。在欧拉之前，其他数学家曾经从有限差类推到无限小差，从有限项和类推到无限项和，从有限项积类推到无限项积。而欧拉便从有限次方程(代数方程)类推到无限次方程，把用于有限之法则应用于无限上去了。

以上两例都是运用类比联想而大胆迈出的步子，从而找到了规律与方法。自然界现象之间有着许多相似之处，这使我们能够用类似的方法处理许多不同的问题。如对各种波的研究其方法就可以互相模拟。在数学的内部也存在着惊人的相似之处，掌握这种相似的类比，对于从一种数学体系到另一个数学体系的过渡，对于新的数学体系的深入研究，对于预测和猜想某些新结果都是非常重要的。比如，对于自然数理论有辗转相除法，最大公约数，最小公倍数以及惟一分解定理。对于多项式也类似地有辗转相除法，最高公因式，最低公倍式以及惟一分解定理。二者的定理，证明定理的方法，逻辑结构都有明显的相似之处。因此我们可以通过整数的性质类比地得到多项式的性质。此外，像分式加减乘除四则运算也很容易从有理数的四则运算规律中类比地得出来。

类比的方法是异中求同，反映着差异性中存在的同一性，没有差异，类比也就不必要了。所谓同，并不是绝对的等同，否则，类比的结果也就没有新颖之处和推广创造了。因此，类比中不仅要求同，而且要注意存异。像在自然数中最大公约数最小公倍数是对数的大小而言，而在多项式中则是最高次数的大小。这些是不能混同的。

类比能使我们从已有的结果、体系推想新的结果和体系。因此，从方法论角度来看，类比推理对于探索新的结果是大有好处的。

在数学中类比或类推可以表现如下种种：

(1)关系的相似。

加　法	乘　法
$a+b=b+a$	$ab=ba$
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$
$a+x=b$ 有惟一解	$ax=b(a\neq 0)$ 有惟一解
$x=b-a$	$x=b/a$
$a+0=a$	$a\cdot 1=a$

(2)实数的加法类似于其他意义下正数的乘法。

任何实数 r 是某正数 p 的对数：$r=\lg p$

$$r=\lg p, r'=\lg p', r''=\lg p''$$

$$r+r'=r'' \backsim pp'=p''$$

在数学中这种保持某种关系的一一对应称为同构。同构的方法也是数学中类推的一种方法。

设$\{A;*\}$与$\{A';*'\}$为任二代数系统，如果ϕ是A与A'间的单、满映射，使得

$$\phi(x*y)=\phi(x)*'\phi(y), \qquad \forall\ x,y\in A。$$

则称ϕ是$\{A;*\}$与$\{A';*'\}$间的一个同构映射，同时也称$\{A;*\}$与$\{A';*'\}$同构。记作$\phi:A\cong A'$或简记为$A\cong A'$。

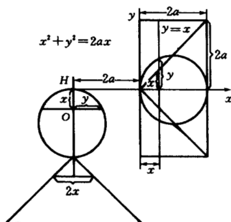
(3)同态也是数学中的一种类推方法。(上述定义中无单射，只有满射时，其余同。称为同态。记为$A\sim A'$)。

三、物理数学实验的方法

虽然过去传统数学中没有实验的手段，但在某些数学公式的探求中，物理方法仍可以给予数学以重要的帮助。可以定量地提供参考数据甚至证明的方法。正如彭加勒(Heuri Poincare)所说："物理数学不仅给我们(数学家)一个解问题的机会，而且也帮助我们发现解决问题的方法。其方式有二，它引导我们预测解答及提示适合的论证方法。"

例 1. 我们介绍阿基米德关于球体积公式的推求，如图(6-1-

5)。



图(6-1-5)

阿基米德所在的时代,圆面积、圆柱、圆锥体积公式都为已知。我们保留原来的思想,而应用现代符号来进行叙述。

阿基米德认为球是由圆旋转而生成。他当时的记号用现代符号表示为

$$x^2+y^2=2ax$$

以 x 轴为轴旋转这圆即可形成球形。

此圆的方程有一项 y^2,而 πy^2 是球形可变断面的面积。(阿氏当年发现锥的容积由检验其断面而得)所以,

$$\pi x^2+\pi y^2=\pi 2ax$$

现在 πx^2 我们可以解释为(由关于 x 轴将 $y=x$ 旋转而生成的)锥面的可变的横断面。下面只需寻求 $\pi 2ax$ 的类似的解释。

注意　$$2a(\pi y^2+\pi x^2)=x\pi(2a)^2 \quad (A)$$

我们注意三个圆盘 πy^2,πx^2 及 $\pi(2a)^2$

三圆都在同一平面内,都是某个旋转体的截面线,这个平面垂直于 x 轴距离原点 O 为 x。这三个旋转体一为球,一为锥面,一为柱面。

$y=x$ 绕 x 轴旋转成锥面,$y=2a$ 旋转成柱面,它们有共同的

底面半径 $2a$，共同的高 $2a$，锥面顶点在原点 O。

阿基米德分别处理这些盘，它们的面积出现在方程(A)的两边。他将半径为 $2a$ 的盘面，即柱面之横断面留在原处，距离原点为 x。

他移动半径为 y 及 x 的盘，即球及锥面的横断面，从原来位置移动到横坐标为 $-2a$ 之 x 轴上的 H 点，把半径为 y 及 x 的圆盘以其中心垂直悬于 H 点下方，由重量可以忽略的线吊起来。

此时，视 x 轴为一杠杆，一条重量不计的硬棒。原点 O 为其支点或悬点，方程(A)是关于力矩(力矩是杠杆臂与其重量之积)的等式。它表明：左边两盘之力矩等于右边一盘之力矩。由阿基米德发明的力矩原理可知，杠杆是平衡的。

当 x 从 O 变到 $2a$ 时，我们获得柱面的所有横断面。这些横断面充满此柱体。对柱面的每一横断面，从 H 点悬着两相对应的横断面。这些断面分别充满了球体与锥体。也就是悬于 H 的球体与锥体和右边的柱体平衡。因此，依阿基米德定律力矩必相等。

设球体积为 V，锥体积为 $\frac{2}{3}a\pi(2a)^2$，柱体积为 $2a\cdot\pi(2a)^2$。可得平衡力矩方程式如下：

$$2a\left[V+\frac{\pi(2a)^2 2a}{3}\right]=a\pi(2a)^2\cdot 2a \qquad (B)$$

$$V+\frac{8\pi a^3}{3}=4\pi a^3$$

$$V=4\pi a^3-\frac{8\pi a^3}{3}=\frac{4}{3}\pi a^3。$$

阿基米德由(A)到(B)只是启发式的假设并非逻辑断言，是一种合情推理，并不是证明。他认为："我们所获得的事实，实际上不是以通常的论据论证方法演证出来的。但是结论的正确性指明有这种论据。""我深信这种方法对于数学是有很大用处的。为此我预言，这种方法一旦被理解，将会被现在或未来的数学家用以发现我还未曾想到过的其他一些定理。"

事实上，以后许多数学发现，不少是受物理方法启发的。如最速降线是与光线折射原理有关的。

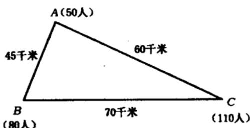


图 (6-1-6)

例 2. 三个村庄居住人数如图(6-1-6)所示。求一点 P，使所有人到 P 点走的路程总和最少。

如图(6-1-7)，应用力学中势能极小原理，物体由高处下落势能 $E=Wh$，总会落到最低位置使势能最小时平衡。

$$E=W_a h_a+W_b h_b+W_c h_c$$

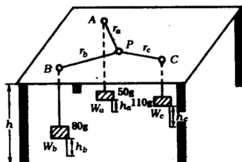


图 (6-1-7)

又 $h_a=r_a+h-l_a$，$h_b=r_b+h-l_b$，$h_c=r_c+h-l_c$

其中，l_a 为过 A 的绳长，l_b 为过 B 的绳长，l_c 为过 C 的绳长。代入得

$$E=W_a r_a+W_b r_b+W_c r_c+[(W_a+W_b+W_c)h-W_a l_a-W_b l_b-W_c l_c]$$

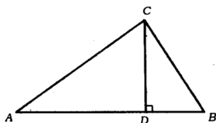
方括号内为定值，处于平衡状态时 E 最小，则

$$W_a r_a+W_b r_b+W_c r_c$$

也最小。因此，按上述方法我们正确地选到了 P 点的位置。

思考题

如图(6-1-8)，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，



图（6-1-8）

（1）证明$\triangle ACD\backsim\triangle CBD\backsim\triangle ABC$。

这个结论你了解吗？

（2）在了解上述结论的情况下，请你观察图形并从这个特殊中发现或猜想到什么一般规律吗？

第二节　“观察——猜想——证明”的发现过程

观察（试验）→猜想→证明是数学发现的认识过程。这个过程从总体看是由粗糙到精确，由不完全到完全的发展过程。从具体环节看，又包含着若干具体的数学推理，形成由合情推理发现猜想，由数学证明确认真理的两大阶段。

研究数学总要进行推理，所谓数学推理就是人们运用数学概念和判断作出新的数学判断即新的结论的逻辑过程。

逻辑推理主要有三种形式：其一，由一般命题推出特殊命题的方法——演绎推理。例如几何证明中，使用的主要证明方法是三段论式的逻辑演绎。由三角形内角和为180°出发，可以演绎推出，等腰直角三角形一个锐角为45°。其二，由一类特殊命题推出另一类特殊命题——类比推理，比如由自然数质因数分解惟一性定理可以类比地推得多项式的分解惟一性定理。其三，由特殊个别情况的前提得出一般结论的推理，——归纳推理。归纳推理有不完全归纳和完全归纳之分。一般来讲，类比与不完全归纳所得的结论未必是真命题。因此，它们都是合情推理。在发现数学规律的探索中，它们起着特殊重要的作用。

一、数学猜想

人们在有限次的观察中(少量或较大量)发现了研究对象满足某种规律,试图将这种规律推广到一般的情况去(无限的或任意的),从而提出一个有待证明的命题。这就是所谓的“猜想”。得出猜想主要是应用合情推理,可以由类比方法得出猜想,也可以由不完全归纳得出“猜想”。

例 1. 哥德巴赫猜想

特例　3+7=10, 3+17=20, 13+17=30

观察分析:3, 7, 13, 17 都是质数,可见,10, 20, 30 这几个偶数都可以表为两个质数之和,这只是**提示性的接触**,那么其他偶数有无这种规律?

进一步试验:6=3+3

8=3+5

12=5+7

14=3+11=7+7

16=3+13=5+11

这个过程能否永远作下去?这些个别情况能够提供什么一般的叙述呢?

得出假设,**任何大于 4 的偶数是二个质数之和。**

一般命题,**任何既非质数,又非质数平方的偶数必为二奇质数之和。**

由特殊例子提示→观察中的暗示→归纳出结论→推测得出一般表述。其中:

首先,注意**雷同之处**:3, 7, 13, 17 均为质数,10, 20, 30 均为偶数,3+7=10,3+17=20, 13+17=30 彼此很相似。

其次,推广检验,从 3, 7, 13, 17 推广到任意奇质数,将 10, 20, 30 推广到偶数。

采用欧拉“准实验”法,比如在 60 以内的偶数进行实验,从检

查收集的观察材料中比较并综合，然后寻找隐藏于其中的若干线索，这些试验支持我们的推测。

最后，归纳得出猜想命题，是用特例进行不完全归纳而得，并且审查的例子越多，如果印证结果正确，则猜测结论可信度增加。

例 2. 费尔马猜想

法国数学家费尔马（1601—1665 年）观察到

$$F_0=2^{2^0}+1=3$$
$$F_1=2^{2^1}+1=5$$
$$F_2=2^{2^2}+1=17$$
$$F_3=2^{2^3}+1=257$$
$$F_4=2^{2^4}+1=65537$$

它们都是质数，于是试图把这种通过有限次观察得到的结论推广到一般情况去，提出了如下猜想：形如

$F_k=2^{2^k}+1$ 的数都是质数（$k=0,1,2,3,\cdots$），这就是著名的费尔马猜想。

例 3. 当自然数 $n=2,3,4\cdots,300$ 时，发现凡是 n 能够整除 2^n-2 时，n 即为质数。

如：$2\mid 2^2-2$，$3\mid 2^3-2$，$4\nmid 2^4-2$，$5\mid 2^5-2$，

$6\nmid 2^6-2$，$7\mid 2^7-2$，$\cdots$

在这个基础上，试图引出一般的结论，于是提出了“**对于大于 1 的自然数 n，如果 n 能整除数 2^n-2，那么 n 一定是质数**”的猜想。

例 4. 由两个相邻的奇质数组成的数对，叫孪生质数。例如（3，5），（5，7），（11，13）这些例子都是孪生质数，一直找下去可以找到许多对孪生质数，如（109619，109621），（10009871，10009873）及（1000061087，1000061089）都是孪生质数，据统计，在三千万（30000000）以内共有 152892 对孪生质数，随着范围扩大，孪生质数会很多。因此猜想，在自然数中，孪生质数有无穷多对，这就是著名的孪生质数猜想。

例 5. n 为自然数，形如 n^2+1 的质数有无限多个。这也是一个关于质数的猜想。

人们试验发现：$2=1^2+1, 5=2^2+1, 17=4^2+1, 37=6^2+1$, …，均为形如 n^2+1 的质数，并且当 $n\leqslant10000$ 时，找到有 842 个形如 n^2+1 的质数，当 $n\leqslant100000$ 时，有 6656 个形如 n^2+1 的质数；当 $n\leqslant180000$ 时，有 11223 个形如 n^2+1 的质数。因此，人们猜想，当 n 为自然数时，形如 n^2+1 的质数有无限多个。

例 6. 费尔马曾经声明自己已经证明过一个命题的正确性：

如果 n 是大于 2 的自然数，则方程

$$x^n+y^n=z^n$$

没有自然数解。

由于费尔马的声明"我的确已经找到这定理的奇妙证明，但这里地方太小写不下了"，引起了人们的关注。后人无论在他的文稿或传抄本中都没找到有关的证明，而人们发现证明此命题绝非易事。欧拉(1797 年)只证明当 $n=3, n=4$ 时命题成立；勒让德尔(1823 年)证明 $n=5$ 时命题成立；1849 年库麦尔证明当 n 小于 100 时，命题成立。这些后来的工作远超出费尔马当时的数学知识范围。因而，究竟费尔马如何找到他的大命题的一般初等证明？成为一个神秘的问题，这也就是著名的"费尔马大定理"问题。

例 7. 四色猜想，一张画在平面上或球面上的地图，相邻的国家如果涂以不同的颜色，只用四种颜色就足够了。(这里相邻的国家是指具有共同边界的国家，如果只在一点相连接，则不算是相邻的)。这个问题是从经验中归纳出来的猜想，当然是不完全归纳。虽然只要几分钟就可以把它向任何一个不懂数学的人交待清楚，但是数学家们用了一个多世纪时间仍未彻底找到"四色问题"的简化证明。

正因为猜想还只是从若干个(但非全部)特殊情况作出的一般结论，所以结论可能真也可能不真。然而从经验中归纳出猜想毕竟是认识数学真理的第一步，这一步只是提出了命题。只有再经过严

格的证明才能确认命题的真或伪，有些猜想后来被证明为数学定理，也有些猜想被否定，也还有许多猜想既没被证明又没被否定，仍在人们继续研究之中。

古人由筛法求质数，猜测质数有无穷多个，早在公元前 300 年左右，欧几里得《原本》中证明了这个猜想，于是“质数无限多”便成为数学中一个定理。

关于四色猜想，直到 1976 年才有人(K. Appel, W. Haken, J. Koch 三人)利用电子计算机，据说花了大约 1200 个机器小时，证明了这个猜想是正确的，他们的证明中含有近 100 亿个逻辑判定。这个证明虽不理想，但总算用机器证明解决了这一难题。但证明能否简化？是否不用计算机也能证明？尚待进一步研究。

还有许多猜想后来被否定，推翻一个猜想只要能举出一个反例即可。但找出这种反例，有时也非容易之举。

比如费尔马猜想 $F_k=2^{2^k}+1$ 都是质数($k=0,1,2,\cdots$)，后来欧拉证明了，当 $n=5$ 时，$F_5=2^{2^5}+1=4294967297=641\times 6700417$
是个合数。这样就否定了这一猜想。

后来又有人发现：

$F_{12}=2^{2^{12}}+1=2^{4096}+1$ 可被 114689 整除。

$F_{13}=2^{2^{13}}+1$ 可被 167772161 整除。

至于例 3 的猜想，直到近代才找出反例：即 341 是一个合数，却有 $341\mid 2^{341}-2$。

至于例 4，例 5，至今未能证明，也未能被否定，仍是人们探索的课题。例 6 费尔马大命题，虽于 1993 年被宣布证明，但证明中存在瑕点，后来经过数学家安德鲁·维尔斯的研究改进、修正，在 1994 年底，费尔马大定理——这个困扰人类 300 年的著名问题，最终被人类的智慧所征服。

通过上述分析可见：

1. 提出猜想的过程，就是从观察事物的表面现象到进而试图

揭示事物本质的过程。是从偶然向必然、特殊到一般过渡的过程，猜想是从经验向理性认识过渡的桥梁。不会或不敢猜想，就不可能发现数学规律。正如牛顿所说："没有大胆的猜测，就作不出伟大的发现"。

2. 数学猜想具有两个明显的特点：一是具有一定的科学性，因为它是以某些已知数学事实为基础，所以猜想是有所依据的，与毫无根据的胡猜乱想有本质区别。二是具有某种假定性，因为它没有经过全面而严格地证明和检验，所以猜想的根据又是不充分的，只是一种猜测性的推断。因此，数学猜想是科学性与假定性的辩证统一。

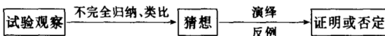
猜想命题势必有以下三种可能的归宿：其一被证明为真成为一个定理；其二，找出反例，否定这个猜想；其三，有的猜想，可能是某个数学系统中被证明是不可判定的，如连续统假设。1938 年哥德尔证明它与 ZFC 系统不矛盾。1946 年科恩证明该假设不能由 ZFC 公理推出。即证明了该假设在 ZFC 公理系统中是不可判定的。

3. 从经验中只由少数特殊命题归纳出一般命题的数学猜想，它是人们发现规律的重要方法。要成为一个好的数学家，你必须首先是一个好的猜想家。人们为了解决猜想，付出艰辛的劳动，证明猜想为真是对数学的贡献；否定了猜想，从反面加深了对所研究数量的认识也是贡献。有些猜想虽然至今仍未解决，但数学家为了证明它而引入了新的概念，提出了新方法或新思路，这无疑也都是对数学发展的推动。

提出猜想，证实或否定猜想，坚持真理不断修正错误，这是探索数学真理过程中的必经之路。

二、观察→猜想→证明

在数学探索过程中，观察→猜想→证明是经常采用的思维过程。



我们通过例题说明这个发现过程的思维链条：

例 1. 已知数列 $1^2,2^2,3^2,\cdots,n^2,\cdots$

试求其前 n 项之和 S_n 的表达式。

试验：先对 $n=1,2,3,4,5$ 进行试算。

易知 $S_1=1$

$S_2=1^2+2^2=5$

$S_3=1^2+2^2+3^2=14$

$S_4=1^2+2^2+3^2+4^2=30$

$S_5=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$

对上述几个和数很难直接发现规律，所以另想办法，因为 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，

试分析前 n 项平方和与前 n 项和的关系：

观察比式

$$S'_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2}{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}$$

试算 $S'_1=1\quad S'_2=\frac{1^2+2^2}{1+2}=\frac{5}{3},S'_3=\frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3}=\frac{7}{3}$

$S'_4=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1+2+3+4}=\frac{30}{10}=3,S'_5=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{1+2+3+4+5}=\frac{55}{15}=\frac{11}{3}$

观察规律：

$$S'_1=\frac{3}{3},S'_2=\frac{5}{3},\ S'_3=\frac{7}{3},S'_4=\frac{9}{3},S'_5=\frac{11}{3}$$

拆凑揭示规律：

$$S'_1=\frac{2\times1+1}{3},S'_2=\frac{2\times2+1}{3},S'_3=\frac{2\times3+1}{3},$$

$$S'_4=\frac{2\times4+1}{3},S'_5=\frac{2\times5+1}{3}$$

以上每个 $S'_n(n=1,2,3,4,5)$ 都等于一个分数，其分子等于它下标数 n 的二倍加 1，其分母为 3。

用对特殊情形观察所发现的规律，推向一般结论，得出猜想：

$$S'_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2n+1}{3}$$

即 $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{(2n+1)}{3}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

证明(从略)

例 2. 已知平面上有 n 条直线,任二条都不平行,任三条都不共点。

问这 n 条直线将平面分成多少部分?

解:如图(6-2-1)设 n 条直线,任二条不平行,任三条不共点,称为"标准分布"。标准分布的 n 条直线分平面所成部分数为 $f(n)$。

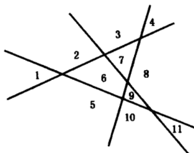
1° 对 $n=1,2,3,4,5$ 时进行试验

$f(1)=2$

$f(2)=4$

$f(3)=7$

$f(4)=11$ $f(5)=16$



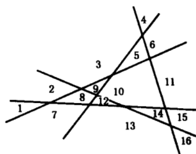


图 (6-2-1)

观察找规律：

$f(1)=1+1$

$f(2)=1+1+2$

$f(3)=1+1+2+3$

$f(4)=1+1+2+3+4$

$f(5)=1+1+2+3+4+5$

2° 猜想：根据特殊情况所发现的规律可推测一般规律是：

$f(n)=1+1+2+3+\cdots+n=1+\frac{1}{2}n(n+1)$

3° 证明，用数学归纳法：

当 $n=1$ 时，$f(1)=1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=2$，命题成立。

设 $n=k$ 时，$f(k)=1+\frac{1}{2}k(k+1)$

我们证明 $n=k+1$ 时命题

$$f(k+1)=1+\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]\text{成立。}$$

事实上设 $k+1$ 条直线 $l_1,l_2,\cdots,l_k,l_{k+1}$ 是任二条都不相交，任三条都不共点的标准分布，共分平面区域数为 $f(k+1)$。

我们看直线 l_{k+1}，它与 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 每一条都有一个交点，共 k 个交点，这 k 个交点将 l_{k+1} 截为 $k+1$ 段(其中有 $k-1$ 条线段，2 条是射线)每一段都是相邻两个区域的公共边界。这样，若擦去 l_{k+1}，则变为标准分布的 k 条直线，区域数减少 $k+1$ 个，于是

$$f(k+1)-(k+1)=f(k)$$

即

$$\begin{aligned} f(k+1)&=1+\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\ &=1+\frac{1}{2}(k+1)[k+2]\\ &=1+\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1] \end{aligned}$$

这就证明了，对任意自然数 n，都有 n 条标准分布的直线分平面所成部分数 $f(n)=1+\frac{1}{2}n(n+1)$。

上面二例告诉我们一个很重要的思考数学问题或探索数学规律的方法：为了得到某种数量关系的一般规律，可以先对这类问题的某些个别情况予以试验、对试验结果观察分析，发现其中具有实质性质的共同点，然后利用不完全归纳、类比推理等合情推理把它推广到一般情况，提出假设或猜想，最后再进行严格的数学推导或给予理论证明，或举出反例把猜想否定。这样一个思考问题的过程可以概括为

试验、观察⟶猜想⟶证明

或　经验⟶假设⟶证明

这正是对数学规律发现的一个辩证认识过程。

在数学历史上利用这种方法发现规律的事例是极为常见的。

例如　牛顿二项式定理中对二项展开系数规律的认识：

$(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

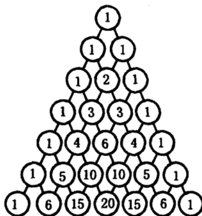
……

由特殊情况，观察规律，得出猜测：

$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+C_n^3a^{n-3}b^3+\cdots+C_n^nb^n$

然后再用数学归纳法就可证明上式，这就是牛顿二项式定理。

我国宋代杨辉三角形如图(6-2-2)就是对二项式定理中的系数形成规律的一个总结。



图(6-2-2)

再如，高斯一生都对质数分布规律极感兴趣，做了大量的极有成效的研究工作。以 x 表示自然数，$\pi(x)$ 表示不超过 x

的质数的个数，则如表(6-2-1)：

表 (6-2-1)

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\pi(x)}$
10^1	4	2.5≐1×2.3
10^2	25	4.0≐2×2.3
10^3	168	6.0≐3×2.3
10^4	1229	8.1≐4×2.3
10^5	9592	10.4≐5×2.3
10^6	78498	12.7≐6×2.3
10^7	664579	15.0≐7×2.3
10^8	5761455	17.4≐8×2.3
10^9	50847534	19.7≐9×2.3
10^{10}	455052512	22.0≐10×2.3

当 x 从 10 的某一方幂变到下一个方幂时，x 对 $\pi(x)$ 的比值总接近于这个幂次的 2.3 倍。数学家立即认出 2.3 是 10 的自然对数(以 e 为底的对数)，于是猜测

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log_e x}\left(\text{即}\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log_e x}}=1\right)$$

这个关系式称为质数定理，高斯在 15 岁那年就发现了这一事实。

高斯一生都对质数分布问题很感兴趣，并做过大量的计算。在给 Enke 的一封信中，他曾说过他是如何“随时随地利用空闲的十多分钟计算连续一千个数中的质数”(即一千个数的区间中的质数个数)。最后他列出了三百万以内的质数表。并把它们的分布情况与他猜测的公式进行了比较。从这个例子我们看到高斯关于质数分布猜测的发现过程。

再如，我们看应用数学中的一个例子。运筹学中的图上作业法就是从经验中概括出来，然后被加以理论证明的。

1950年，我国东北地区交通运输部门为了制订合理的调运方案，他们在工作实践中发现了图上作业法的原始规律，即对于只有一条环状铁路，其上只有两个“发点”及若干个“收点”的情况。每一发点向两边供应的最大界限的定法应该满足：顺时针方向的运输线长之和等于逆时针方向的运输线长之和的规律。这个初步结果传入了粮食部以后，在实际工作中又大大发展了。他们不但考虑了一条环状线路上多个发点和多个收点的情况，而且在实践中观察总结出多个圈的规律，最后形成图上作业法的完整方法。这就是一**个调运方案是最好的(即吨公里数最小)，它的充要条件是它的流向图里没有对流。而且对于它的流向图的每个圈来说，内圈流向的长和外圈流向的长各都小于或等于这个圈长的一半**。这是不是一个普遍规律呢？1958年数学所运筹室的同志给这个结论予以理论上的证明。然而当交通网络是多个圈的情况时，实际上应用上述方法作方案是十分麻烦的。能否简化呢？数学工作者验算了一些特殊情况之后，发现只要用上述方法检验独立圈就已足够了，用不着检查所有的圈。然后经过理论证明，确认这是对所有多圈线路都成立的普遍规律。

以上诸例，说明在数学发现中，“观察→猜想→证明”或“经验→假设→证明”这种方法运用的广泛性。为什么如此呢？因为就人们的认识秩序来说，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步扩大或深化到一般的事物。而这种数学发现中探索思考的方法，其基本点就在于由个别特殊中发展到一般，在于一般存在于个别之中这一辩证思想的具体运用。

思考题

1. 任给一个整系数多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

若 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，…，$f(100)$均为质数。有人猜想，当 x 取任意非负整数时，$f(x)$均为质数。这个猜想正确吗？

2. 简述数学猜想的性质及意义。

3. 用试验观察→猜想→证明的方法，探求和式

$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)$的计算公式。

第三节　化归与关系映射反演方法

一、化归原则

问题是数学的心脏，学数学必须学会解题。若从静态角度看数学，数学是数学知识、定理、符号公式的汇集，枯燥乏味。然而若从动态角度去审视，数学是一种实际的研究活动，是数学家思维的过程。那么数学家解决数学问题是怎样思维的呢？他们的思维有何特点呢？他们自觉不自觉地总要从联系的观点看问题，用转化的手段去处理问题，这就是所谓的化繁为简，以简驭繁，化未知为已知，以已知的知识为基础，探索解决未知的领域的"化归原则"。

著名的匈牙利数学家路沙·彼得以如下的比拟对数学家的思维方式作了生动的描绘：有人提出了这样一个问题："假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴。你想烧开水，应当怎样去做？"对此，某人回答："在壶中灌上水，点燃煤气，再把壶放到煤气灶上"，提问者肯定了这一回答；但是，他又追问道："如果其他的条件都没有变化，只有水壶中已经有了足够的水，那你又应当怎样去做？"这时被提问者往往会很有信心地说："点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上"。但是提问者指出，这一回答并不能使他感到满意。因为，更好的回答应是这样的："只有物理学家才会这样做，而数学家们则会倒掉壶中的水，并声称我已把后一问题化归成原先的问题了。"这段略有夸张的比拟生动地揭示了数学家思维的重要特点之一，从方法论角度来说就是化归原则。

所谓“化归”原则，是指数学家们把待解决或未解决的问题，通过某种转化过程，归结到一类已经解决或者比较容易解决的问题中去，最终求得原问题之解答的一种手段和方法。

著名的数学家、数学教育家G·波利亚(1887—1985年)曾经在《怎样解题》一书中给出了著名的“怎样解题表”，我们集录于下：

怎样解题表

第一 你必须弄清问题。	**弄清问题** 未知数是什么？已知数据是什么？条件是什么？满足条件是否可能？要确定未知数，条件是否充分？或者它是否不充分？或者是多余的？或者是矛盾的？ 画张图。引入适当的符号。 把条件的各个部分分开。你能否把它们写下来？
第二 找出已知数与未知数之间的联系。 如果找不出直接的联系，你可能不得不考虑辅助问题。 你应该最终得出一个求解的计划。	**制定计划** 你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？ 你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？ 看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。 这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题。 你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？ 你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？ 回到定义去。 如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知数的其他数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？ 你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

第三实行你的计划。

实现计划

实现你的求解计划，检验每一步骤。

你能否清楚地看出这一步骤是正确的？你能否证明这一步骤是正确的？

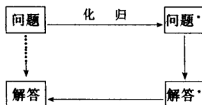
第四验算所得到的解。

回　顾

你能否检验这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？能不能一下子看出它来？

你能不能把这结果或方法用于其他的问题？

其中第二款制定计划中设问的问题，都是设法寻求将所解问题化归为简单的或已知问题的途径。可见这个表中解题思想的核心是化归原则，我们用框图表示如下：



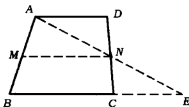


图 (6-3-1)

利用化归原则的必要条件是：与原问题相比，化归后所得的问题'，必须是已经解决了的或者是较为容易、较为简单的。

例 1. 在初等几何中，众所周知"三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半"，这就是三角形中位线定理。然而对于梯形中位线定理，"梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半"。其证明方法，正是如图连结 AN，交 BC 的延长线于 E，化归为△ABE 中利用三角形中位线定理证明的。其中"连结 AN 交 BC 延长线于 E"造成

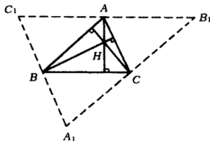


图 (6-3-2)

MN 为$\triangle ABE$ 的中位线，是实现化归的具体途径。

例 2. 在讲不共线三点决定一个圆之后，可得："三角形三边的中垂线共点"，这个点叫做该三角形的外心。当"证明三角形三条高线交于一点"时，使用了化归方法：过 A、B、C 分别作该顶点对边的平行线，交成$\triangle A_1B_1C_1$，图(6-3-2)。这时，$\triangle ABC$ 的三条高线，变为$\triangle A_1B_1C_1$ 三边的三条中垂线，而这三条中垂线共点 H，即$\triangle ABC$ 的三条高线共点 H。其中作$\triangle A_1B_1C_1$ 是实现化归的关键。

例 3. 在"求 $y=a\sin x+b\cos x$ 的极值"时，通过恒等变形，设辅助未知数，使

$$y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)$$

$$\left(\text{其中}\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$$

这样求 $y=a\sin x+b\cos x$ 极值化归为 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 的研究，而后者是我们已经掌握的。

例 4. 计算 $\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$

由于 $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$

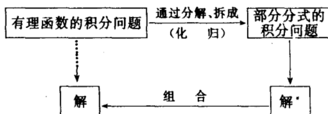
$$\therefore\quad \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=-\frac{3}{2x}+\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)}$$

因此有 $\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x}dx+\frac{5}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{d(x+2)}{x+2}$$

$$=-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+2|+C$$

其化归过程如框图所示。



例 5. 在中学微积分教材中,拉格朗日中值定理,"如果函数 $f(x)$在闭区间$[a、b]$上连续,在开区间$(a、b)$内可导,那么在$(a、b)$内至少有一点 ξ,使得

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}"$$

正是通过构作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

知 $\varphi(x)$在$[a、b]$上连续,在$(a、b)$内可导,且 $\varphi(a)=\varphi(b)$满足已知罗尔定理的条件,因此,至少存在一点 ξ,$(\xi\in(a,b))$,使 $\varphi'(\xi)=0$

但 $$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

于是 $$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

所以 $$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

正是通过构作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$,化归为罗尔定理实现证明的。

从上述诸例可以看到,从认识论角度审视,化归就是通过普遍联系、运动变化的观点看问题,使原问题转换为另一个或若干个已知的、简单的、熟悉的问题加以认识。

从方法论的角度来看,化归表现出一种运用方法的"指向"性,其实施过程包含化归的对象(条件,结论),化归的方向(熟知的形式,简单的形式),化归的途径——实施手段。其中,发现、构想实施手段是用化归思想研解数学题的难点与关键。

例 6. 单位正方形周界上任意两点之间连一曲线,如果它把这

个正方形分成两个面积相等的部分，试证这个曲线段的长度不小于1。

分析：(1)"周界任两点"在正方形一组对边上，如图(6-3-3(*a*))，结论显然成立。

(2)"周界任二点"在正方形一组邻边上，可连对角线，如图(6-3-3(*b*))，连结一条对角线，经过反射，化归为(1)的情形。

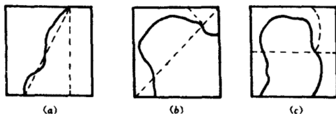


图 (6-3-3)

(3)"周界任二点"在正方形一边上时，可如图(6-3-3(*c*))连一组对边中点连线，经过反射化归为(1)的情形。

在上述(1)、(2)、(3)中，(1)是最基本的情况，通过轴对称(反射)的手段实现了(2)、(3)化归为(1)，从而得到问题的解答。

二、关系映射反演方法

化归的原则十分广泛，其本质就是转化。在数学上的体现多种多样，变换，恒等变形等都是化归原则表现的具体手段，其中有一种与一一对应相联系的化归——同构化归具有重要的意义。这就是关系(Relation ship)映射(Mapping)反演(Inversion)方法，简称*RMI*方法。

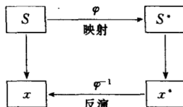
我们通常将数学对象看成一个对象集合，它的特点是"量性对象"又是一种"逻辑构造"。是借助明确的定义逻辑地构造的，从而保证了对象的一义确定性。这一点正是人们对数学对象进行客观研究的必要条件。

数学对象之间并不是孤立存在的，彼此之间具有明确的制约关系，即所谓数学关系，如代数关系，序关系，拓扑关系，函数关系

等都是数学关系。**我们把彼此之间具有某种或某些数学关系的数学对象的集合称为关系结构。**

凡在两类数学对象或两个数学集合元素之间建立了一种“对应关系”，就称定义了一个映射，记为 $\varphi: S \to S^*$，$\varphi(a)=a^*$。当 φ 能将 S 映满 S^* 时，即 $S^*=\varphi(S)$，**将 S^* 称为 S 的映射关系结构。**最后，φ 是可逆的，就把 φ 的逆 φ^{-1} 称为“反演”，从而 $\varphi^{-1}: S^* \to S$。

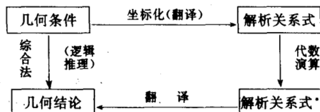
给出一个含有目标原象 x 的关系结构 S，如果能找到一个可定映映射 φ，将 S 映满 S^*，则可以从 S^* 通过一定的数学方法把目标映像 $x^*=\varphi(x)$ 确定出来，进而通过反演 φ^{-1} 又可把 $x=\varphi^{-1}(x^*)$ 确定出来，这样，原来的问题就得到了解决。这就是关系映射反演方法，即 *RMI* 方法。它是化归原则在数学方法论中的深化与发展，用框图表示如下：



其主要步骤是：

关系→映射→定映→反演→得解。

例 1. 用解析法证几何题，将平面点集这一几何结构与 $\{(a,b)\}$ 代数结构建立一一对应。解析法的基本思想在于把几何问题代数化，图形性质坐标化，其框图如下：



例 2. 对数计算。

求　$y=\dfrac{729^2\times\sqrt[3]{3.24}}{12.01^5}$

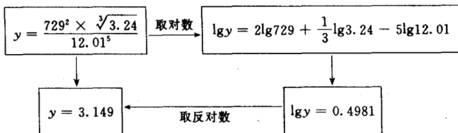
解：$\lg y=\lg\left(\frac{729^2\times\sqrt[3]{3.24}}{12.01^5}\right)$

$=2\lg 729+\frac{1}{3}\lg 3.24-5\lg 12.01$

$=2\times 2.8627+\frac{1}{3}\times 0.5105-5\times 1.0795$

$=0.4981$

取反对数，$y=3.149$



其本质是$<R^+,\cdot>\leftrightarrow<R,+>$。实现较高级运算向低级运算的化归。

例 3. 图论方法实际是 *RMI* 方法的具体应用。如："任意六个人中要么存在有三个人彼此两两相识，要么存在三个人彼此两两不相识。"

六个人$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$，$a_i$，$a_j$ 两个人要么相识，要么不相识，称为一个关系结构 $S(i,j=1,2,3,4,5,6,i\neq j)$。

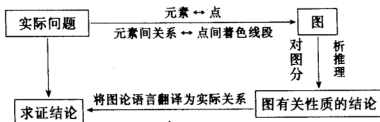
六个点$\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6\}$，$A_iA_j$ 连红色线段或蓝色线段，称为一个关系结构 $S^*(i,j=1,2,3,4,5,6,i\neq j)$

$a_i\leftrightarrow A_i$　　a_ia_j 相识$\leftrightarrow A_iA_j$ 线段染红色，

a_ia_j 不相识$\leftrightarrow A_iA_j$ 线段染蓝色。

结论，要么有三个人彼此相识要么有三个人彼此不相识↔"要么存在红边三角形要么存在蓝边三角形"↔"存在单色边三角形"，这样问题变为：

"空间六个点，任二点所连线段染且只染红、蓝两色之一，证明，一定存在一个三角形，其三边同色。"



应用 *RMI* 方法的必要条件是：

第一，采用的映射 φ 必须是可定映的。即给个目标原象 x，通过数学手续，可把映象 $x^{*}=\varphi(x)$ 一义的确定下来，$S^{*}=\varphi(S)$。此时 φ 称为可定映映射。

第二，相应的逆映射（反演）φ^{-1} 必须具有能行性。

因此，应用 *RMI* 方法的关键，在于引进合乎要求的映射。谁能对一些十分重要的关系结构 S，巧妙地引进非常有用且具有能行性反演 φ^{-1} 的可定映映射 φ，那么谁就会对数学作出较重要的贡献。

建议大家用数学中概念、问题的分析来熟悉体会 *RMI* 方法的具体应用。

思考题

1．什么叫化归原则？应用化归原则的必要条件是什么？试举五个例子说明化归原则。

2．什么是 *RMI* 方法？应用 *RMI* 方法的必要条件是什么？试举五个例子说明 *RMI* 方法。

第七章

19世纪以来数学的某些进展及其特点

从数学的内容、重大发现以及数学的主要特点来考察，数学的发展大致可分为四个时期：

数学的萌芽期，主要指人类从生产实践中积累得到初步的数学知识，这些知识是由经验产生的、零碎的、只是个别问题的举例，还没有形成系统的科学。这个时期在约为公元前6世纪以前，这个时期相当于原始社会及奴隶制初期的阶段，主要成果是初步形成了数与形的概念，学会了计数方法，找到了一些经验公式。

初等数学时期(公元前6世纪—16世纪)，相当于奴隶制较为发展的时期以及封建社会中数学发展的情况。由于体脑显著分工，社会上出现了专门的脑力劳动者，他们对实践中产生的数学知识加以整理，天文学、农业、水利建设等需要，形成了算术、几何、代数、三角这一系列初等数学的知识。

这个时期由于生产力水平低，人们基本上是把世界看成静止的，天文上星座的位置关系看成固定关系。圆周率是一个永远正确

的固定常数,所以这个时期又称常量数学时期。

变量数学建立时期(近代数学时期,17—18 世纪),主要指欧洲 17 世纪资产阶级革命开始,生产力的发展,要求能有新的数学工具相适应,于是研究变量的数学——解析几何以及微积分产生了。并且发明了对数,大大简化了计算的繁重劳动,为数学的发展开拓了新的局面。随之理论力学、微分方程、复变数函数都有了一定的发展。

以上是 19 世纪 20 年代以前数学发展的大体情况。19 世纪,在生产和科学实验的推动下,数学发展突飞猛进,数学发展开始进入,**现代数学时期**,在这个时期,对前三个时期积累的大量材料,需要在理论方面进行概括,做理论奠基工作。引起了数学向高度抽象方面发展,到了 20 世纪。数学发展更加抽象,基础科学与应用科学相互渗透,纯数学与应用数学相互渗透,航天、微观等手段加深了人们对自然的认识,促使数学应用更为广泛,数学学术交流日益增加。电子计算机的广泛应用,使世界走向数字化的信息时代。由于"高技术的本质是一种数学技术",使人们对数学的认识也在发生深刻的变化。下面我们的工作是:简要介绍 19 世纪以来数学某些进展的概况及其特点,趋势。为大家进一步研究数学的客观基础及辩证性质提供一些资料及线索。

第一节 某些数学分支的重大变革

19 世纪以来,由于几个主要的数学分支发生了重大变革。数学的发展走上了新的阶段。

一、群论的建立及抽象代数学的形成

群论的建立与研究代数方程的理论相联系。大家知道,一元二次、三次、四次方程都有求解的公式。这些求解公式是由方程中各项的系数经过有限次加、减、乘、除、开方等运算组成的。那么,对五

次及五次以上的方程能否找到这种一般的公式解呢？从16世纪到18世纪近二百多年没有任何人怀疑过五次及五次以上的方程存在公式解，并且为找出它们的一般公式解付出了艰辛的劳动。然而却没有成功。直到1770—1771年，法国数学家拉格朗日（1736—1831年）才提出新的见解，认为“用我们所考虑的方法（注：指对三次、四次方程找出根式解的方法）给出五次方程的完全解决是很值得怀疑的”。并觉察到方程根的排列理论比方程用根号解的理论有着更大的意义，是“整个问题的真正哲学”。1824年阿贝尔（1802—1829年）严格证明了，当方次 $n\geqslant 5$ 时，除特殊方程外，任何一个由系数组成的根式都不可能是方程的根，阿贝尔虽然证明了高于四次的一般方程不能用根式解出，但是有多少种不同类型的特殊的高于四次的方程是可以用根号解出的呢？这就要求找出方程能用根式解出的充要条件。法国数学家伽罗华（1811－1832年）正是抓住了方程根的排列与方程能否用根式解出的联系，发现每个代数方程必有反映其特殊性的置换群存在，利用群的性质给出了方程可用根式解的充要条件，最终彻底解决了这个问题。

伽罗华理论最重要的贡献，在于第一次提出了“群”这样一个十分深刻的新概念，为群论的建立、发展奠定了基础。群论除了在解决古希腊几何三大问题上有过应用外，在其他方面也得到了广泛的应用。此后，更多的这类带有一种或几种运算的对象系统，如环、理想子环、线性空间等等，抽象的代数系统相继被发现，这使代数学研究对象发生了重大变化，代数学的发展出现了崭新的面貌。代数学由过去专门研究方程解的学科，发展成为研究各种代数系统的性质与结构的学科。近世的《抽象代数学》就这样形成并发展起来了。粗略而言，抽象代数可以分成交换代数与非交换代数两部分，交换代数主要研究多变数多项式，非交换代数主要集中研究群论——关于对称性的抽象研究。

二、非欧几何的发现及拓扑学的兴起

非欧几何的发现是几何发展史上一个有深远意义的事件。它起初是围绕着企图证明欧几里得几何的第五公设而引起的。但经过两千多年的探索未能得出结果。到了19世纪罗巴切夫斯基等人首先肯定了第五公设是不能用数学证明的，然后用一个与它矛盾的命题来代替它，结果创立了非欧几何。后来，克莱因等人又相继对非欧几何作出了解释，证明了这种新几何的相容性[主要有三种：(1)柏尔特拉米(Beltrami)的微分几何模型。(2)彭加勒(Poincare)的复数平面模型。(3)卡莱—克莱因(Gayley-Klein)的射影几何学模型]。罗巴切夫斯基等人的工作才逐渐被人们所重视，非欧几何的发现开阔了人们的眼界，由于存在着与欧氏几何系统完全不同的非欧几何，几何学的意义扩大了，空间的概念的含义有了新的内容。1854年黎曼(1826—1866年)完成了“论几何学作为基础的假设”的论文，对空间与几何的概念，作了深入而广泛的研究，提出并建立了黎曼几何学(该论文于1867年发表)。黎曼几何与罗氏几何统称为非欧几何学。特别当建立了n维空间、近代的抽象空间等更加普遍的概念之后，“空间”不再是平常所说的空间概念的简单推广或类比，而是与极其丰富的现实内容相联系着，反映了现实世界中某种与空间形式相似的量的关系。例如n维黎曼空间中点的运动可以用来描述n个质点非自由系统的运动。后来，意大利几何学家利齐(1853—1925年)又将张量计算理论引入了黎曼几何学，致使黎曼几何在20世纪初成为爱因斯坦发展相对论的有力的数学工具。

黎曼对于几何学的创造性工作开辟了拓扑学研究的新领域。早期拓扑学起源于欧拉对于“七桥问题”的探讨，黎曼则对曲面同胚问题作了系统的研究，在此基础上，彭加勒等人又以不同方式进行了推广，由于科学技术中许多问题都导致了数学对空间的连续性与连通性这类几何性质的研究，因而促进了拓扑学这门崭新的

几何学分支蓬勃发展。现在拓扑学已发展成为包括组合拓扑、分析拓扑、点集拓扑在内的一门近代数学中的新分科。它在其他数学分支上得到了重要应用并对近代数学的发展产生很大影响。近些年来对于拓扑学的一些中心议题的研究相继取得了显著的成果。法国数学家雷内·托姆(Rene Thom)在奇点理论基础上,以结构稳定这样一个拓扑学命题为基本概念,提出了突变理论。1972年法国拓扑学家写了一本《结构稳定性和形态发生学》,提出用曲面的奇点理论解释自然界的突变现象。其基本思想是:把一个系统的状态分为稳定和不稳定两类,系统在一点的稳定态就是某个函数在这点取极大值或极小值。我们考察使函数的导数为0的那些点,其中是极值点的就是稳定态,非极值点(奇点)往往表示不稳定态,这样,奇点就可以描写种种突变现象。托姆证明了,基本突变只有七种。突变理论一出现,立即受到重视,有人称它是“自微积分发现以来最伟大的一次智力革命”。许多人将它应用于各门实际科学中去提出了各种突变模型。如用它描述如生物胚胎发育这样一些不连续问题,开创了生物数学这一新学科,引起了很大的反响。

三、分析理论的奠基与一般分析学的创立

19世纪,数学分析开始转向逻辑基础的研究。由柯西(1789—1857年)关于极限概念精确化的工作开始,最后由外尔斯特拉斯(1815—1897年)、戴德金(1831—1916年)及康托(1845—1918年)等人相继完成了连续统的理论,为数学分析理论奠定了基石。其中康托集合论的观点在数学发展中起着重大的作用。20世纪初,为了克服所谓“病态函数”不能积分的矛盾,勒贝格创造性地提出了分割函数值区间取和式极限的新思想,确立了勒贝格测度和积分理论,对分析学中的积分论实行了变革。此外,许瓦兹等人由于实际的需要,对经典函数概念进行了拓广,提出并发展了广义函数理论,为近代函数论、积分论、泛函分析理论及偏微分方程理论提供了新的概念与工具。

泛函分析是20世纪30年代形成的在一般意义下的分析理论。它在抽象代数的新方法、几何空间概念的拓广以及分析奠基工作等方面的影响下，概括了当时数学分析，特别是积分方程、变分学、实变函数论的大量成果而建立起来的。它可以看作为无限维向量空间的解析几何与数学分析。泛函分析中典型的研究对象是希尔伯特(无限维欧氏)空间。关于希尔伯特空间的理论，如今已成为许多方面研究工作中的常用工具。

四、数学基础的研究和数理逻辑的崛起

数学基础的研究很重要的工作是前面所说的数学分析的奠基工作。其中康托的集合论对各门数学分支都是最基础的理论。这使许多数学家为之欢欣鼓舞。这种情景，明显地表现在1900年举行的国际数学家会议上，当时最著名的数学家彭加勒骄傲地断言："现在，我们能够说完全的严格性已经达到了。"但是，两年之后，1902年，英国著名的逻辑学家罗素发现了集合论的一个悖论，引起了不少数学家的震惊。所谓"悖论"是指：一个命题，如果由它的真可以推出它的假，而由它的假又可以推出它的真。则这个命题即称为一个"悖论"。最通俗的集合论的悖论的例子是"乡村理发师悖论"："在某一个乡村里有一个理发师，他为所有自己没刮胡子的人刮胡子。而肯定不为那些自己刮胡子的人刮胡子。问：理发师刮了自己的胡子没有？回答，理发师如果刮了自己的胡子，则它属于自己刮胡子的人的集合，所以根据条件他肯定不应为自己刮胡子；若理发师自己没刮胡子，则依条件，理发师应为自己刮胡子。这显然构成了矛盾。""悖论"的出现又反过来刺激数学家探索如何进一步实现严格的数学基础。不同的学派从不同角度，对这个问题进行了探讨。主要有布劳沃(荷兰数学家 Luitzen E. J. Brouwer 的直觉主义，希尔伯特的形式主义以及罗素和怀特海德的逻辑主义数学即逻辑，罗素说"逻辑即数学的青年时代，数学即逻辑的壮年时代，青年与壮年没有截然的分界限。故数学与逻辑亦然")。其中希尔伯

特形式化公理方法、罗素对数理逻辑的探讨对数学发展都有重要的影响。可见,数理逻辑的发展与分析奠基问题是联系在一起的。

20世纪30年代,哥德尔证明了不完全性定理,任何一个充分丰富的形式系统(充分丰富是指它能够描述、表达算术系统),如果它是协调的,那么该系统内就存在一语句A,使得A与它的否定$\overline{A}$在该系统内都是不可证明的。这个定理不仅在数理逻辑与哲学上有重要意义,而且它证明过程中形成的技巧,在数理逻辑发展史上也产生了很大影响。

英国数学家图灵就是分析了哥德尔在证明不完全性定理中的形式技巧而提出了一般机器的概念。冯·诺意曼及其他一些人则根据图灵的分析,在他的思路启发下,开始了现代意义下的数字计算机理论的设想与研究。在第二次世界大战期间,第一台电子数字计算机问世。数理逻辑由于与电子计算机、自动化的工程技术问题相结合,得到了迅速的发展,现已形成一门以命题演算、谓词演算、算法理论、递归论、证明论、模型论以及集合论等为主要内容的独立学科。在解决其他数学分支中的一些难题时,数理逻辑也显示了重要的作用。比如研究模型论中发展起来的“非标准分析”,它试着对数学分析中的无穷小概念以新的刻画并加以推广,取得了一定成果,逐渐引起人们的关注。在证明连续统假设与选择公理的独立性过程中,由美国数学家柯亨创造的一种叫做“力迫法”的新方法,不仅在集合论,而且也使数理逻辑其他几个主要分支都得到了新的发展。

第二节 数学进展的几个特点和趋势

抓住19世纪以来数学各分支中发生的几个重大变革,经过分析,可以看出现代数学中的几个特点和发展的趋势。

一、研究对象更加广泛，表述形式日益抽象

如果说古典数学中求多项式方程 $P(x)=0$ 的根这个问题，好几百年中占据着中心位置，那么后来求未知函数 $f(x)$ 的研究从笛卡儿和牛顿的时代开始日益起着重要的作用。19 世纪以来，数学发生了如上节所述的一些主要变革。20 世纪与 19 世纪相比较，研究多变数函数显示了与日俱增的重要性。

由代数方程求解的一般研究引出群论并发展出抽象代数学，使代数学转向对代数系统结构的研究。如果说普通代数用符号表示数或更复杂的量，一开始就以抽象的形式出现，那么抽象代数则更加抽象。它的符号只是在一定的结合法则和彼此的关系中才有意义。

非欧几何的发现拓广了人们的空间观念，形成了对各种抽象空间的研究。同时由于公理化方法的确立，一个公理系统的对象可以有不同的解释。如果说过去我们所说的点、线、面依据一定的直观意义，那么现在在严格的形式化公理系统中，点、线、面只是成为更加抽象的空间中的模拟物了。比如函数 f 可以是多维空间的点，而距离等概念都变成了一种抽象的数学度量。

我们不但要看到数学表现形式的日益抽象，而且要看到，很多抽象的性质、结构、形式又成为了数学研究的对象。因此像数学基础学家贝尔纳斯(P. Bernays)认为“数学是结构的科学”，并认为数学所研究的结构是所谓“理想的结构”(1975 年)。如今，数学研究的对象包括各种代数结构、几何结构，还包括同态、同调等各种关系以及各种性质，甚至各种属性的属性，各种关系的类和属性以至转换、映照等等也都成为数学所研究的纯粹的“量”。数学研究的对象的这种不断扩大与日益抽象，正是科学研究的不断深入、扩大所致，也正是今日数学进展的重大标志。由于空间形式在一定意义下也是一种量的关系。因此我们可以说数学是研究量和量变的科学。

二、不同分支交错发展，多种理论高度综合

自19世纪以来，各种数学分支越分越细，交错发展，然而作为整体综合发展的趋势在19世纪后期、20世纪初就被某些有远见的数学家所察觉了。数学家经常设法找出数学各领域间潜在的共性，提出统一数学各部分的新观点、新方法。如19世纪后期，克莱因的爱尔朗根计划，就提出用群的观点来沟通当时的各种几何学。凡是与一种几何学相对应的变换，其全体必须组成一个"群"。相反地，凡是一种变换，其全体能组成"群"就可以对这一变换"群"研究图形的不变性质而得到相应的几何学。因为变换群不同，就有不同的几何学。正如我们所熟知的：运动变换群——欧氏几何学，仿射变换群——仿射几何学，射影变换群——射影几何学等。20世纪20年代美国的伯克霍夫又提出格的概念，以统一代数系统的各种理论和方法。大数学家希尔伯特在1900年巴黎国际数学会议上所作的《数学问题》的报告中，就曾经这样提出过问题："数学会不会遭到像其他有些科学那样的厄运，被分割成许多孤立的分支，它们的代表人物很难互相理解，它们的关系变得更松懈了？我不相信会有这样的情况，也不希望有这样的情况。我认为，数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正是在于各个部分之间的联系。"并且预言："数学理论越是向前发展，它的结构就变得越加调和一致，并且这门科学一向相互隔绝的分支之间也会显露出原先意想不到的关系。"希尔伯特晚年曾致力于这方面的研究，写了《数学基础》《数理逻辑基础》等著作。由他先导于19世纪末20世纪初出现的公理化运动，就是以公理系统作为数学的统一基础。20世纪30年代，法国的布尔巴基学派除了继承公理化运动以外，又提出了体现数学完整统一性的各种结构概念。他们以结构的观点，统一处理了现代纯粹数学，著书立说，推动了现代数学的发展。因为他们坚信："不管其外貌如何，数学学科的内在进化，已经在它的不同部分之间引起了紧密的统一，以致产生了某种重要的核心。"他

们致力于寻求这一核心。依据他们的观点，把历来的古典理论、几何、代数、分析等一些原理错综交织在一起，统一于拓扑结构、代数结构、顺序结构这几种结构之中，并依研究结构的异同来划分成不同领域。大约与此同时，美国麦克莱恩与艾伦伯格又提出范畴与函子理论，数学的分门别类即以研究所属范畴为依据，以此作为统一数学的基础，这些正是反映了现代数学发展高度综合性的特点与趋势的一个方面。

从研究范围来看，现代数学发展越来越显示它是一个有机的统一体。不少数学家致力于从整体、大范围入手，从综合联系着眼考察研究问题，兴起了许多大范围、整体数学。如整体微分几何，流形上几何拓扑与微分方程的综合研究，还形成了一门新的分支“大范围分析”。

不仅这样，而且对具体分科问题的研究也显示了高度的综合性。对一些数学问题的研究往往不受代数、几何、拓扑、泛函等分科的限制，而是依靠综合运用各种理论和方法所积累的成果而得以解决。近几年来，一些获得显著成果的经典问题的研究，一些带根本性问题的研究方法以及一些边缘学科的兴起都说明了这一点。

三、数学理论多方应用，边缘学科与日俱增

在各种不同的科学研究中，广泛地利用了数学的各个分支，包括偏序集理论、结构理论、统计和系统结构分析的方法、模拟理论、计算语言和各种计算方法的理论，这表明各门科学向着“数学化”发展，已经成为当今科学发展的一个重要趋势。许多极其抽象的数学理论得到了重要的应用，数学在向其他自然科学领域的渗透中形成了许多相互交缘的新分支。近几十年来，不仅形成了优选学、规划论、对策论、排队论等运筹类学科及控制论、信息论等边缘学科，而且产生了如数学物理、生化数学、经济数学等一些新的学科，它们不再是一些数值解法和计算方法的简单运用，而是应用数学工具探求其他自然科学中的某些规律性。比如现在所讲的数学物

理就与通常的数学物理方法不同，它不限于对一些微分方程及其解的讨论，常常是从事构造性场论的研究。经济数学不再只限于运用数学进行数字统计，而是试图运用数学工具来探求一些经济规律。

由于各门科学的发展，都逐渐从定性的研究进入定量关系的研究，因此，各门科学"数学化"的趋势日益明显。以生物学为例，产生了许多的边缘学科：如数量遗传学、数量植物生态学、数量动物生态学、数量植物生理学、数量动物生理学、数量分类学、数量进化论、分子生物数学、生化数学、生物力学数学等。另外，还有生物统计学、生物概率论、生物运筹学、生物函数方程、生物微分方程、生物拓扑学、生物集合论、电子计算机的生物学应用、生物作用和算图等等，内容极为丰富。如数量遗传学，研究优良生物品种的发掘与保存，计算各种品种的纯度，判定保种具体数量方案。如数量生理学，研究人体激素酶网络系统的平衡及其过渡。人体中数以千计的激素和酶形成网络系统，经常处于一个平衡稳定态，任何一种激素或酶丧失平衡就要生病，年龄变迁，就要由旧平衡致于新平衡，如何平安过渡不生病，可以通过数学网络系统的理论研究各种影响激素、酶网络系统平衡的因素与效应，可以为延长人类寿命提供理论依据和实践方法。再如数量生态学方面以这样问题为科研题目：如自然资源的最佳综合利用、害虫的生物防治，人口数量变迁的研究。人口数量的预测预报是经济计划的重要参数，通过生物统计抽样调查得出人口年龄分布、寿命分布、随医疗条件的进步增寿的趋势，以及计划生育成效进展等数量规律，可借助电子计算机帮助，对我国人口今后的变迁情况作出客观估计，提出科学的控制数字。

数学作为一门基础学科，是研究"数"与"形"及其相互关系和变化的学问。哪里有"形"有"数"或者有量和量的变化，哪里就要用数学。你搞天文学，研究日月星辰，要用数学。你研究基本粒子及其更深层次的结构，也要用数学。搞量子化学，要用数学中的图论

作工具,搞地震预报,要借助数学来分析研究地壳的各种细微变动规律。探索现代生物学中的遗传“密码”,更是一个有趣的数学问题。可以说,数学已经渗透到现代科学的各个领域。可以预见,科学愈进步,应用数学的范围也就会愈大,一切科学研究在原则上都可以用数学来解决有关的问题,只有现在还没有应用数学的研究领域,而没有原则上不能应用数学的研究领域。

四、数学研究借助计算机,理论证明走向机械化

除了数学新分支的形成扩展了数学应用范围以外,计算机和计算机科学的发展改变了以往数学应用的面貌,以及对数学带来了不可忽视的影响。电子计算机是20世纪科学技术上卓越成就之一。它的应用犹如望远镜用之于天文学,显微镜用之于生物学,打开了人类认识自然的新境地一样,计算机与计算机科学的发展不但为数学开拓了新的用武之地,成为现代数学发展中的一个很重要的特点与趋势,而且有力地推动了现代科学技术的迅速发展,引起了生产技术的革命,对社会生活各方面都产生了巨大和深远的影响,人类开始走向“数字化世界”及信息时代。

电子计算机首先成为了数学理论应用于实际的桥梁。有人描述,对于大量的繁杂的计算,“计算机的计算速度和人的笔算速度比起来,就好比是最快的飞机和蜗牛爬行的速度相比”。比如利用数值计算进行天气预报比较准确,这种计算方法,早在20世纪初就知道了。但是由于计算所需要的时间太长,等到计算出结果来,早已成了过去的事实,一点用处都没有了。现在有了电子计算机,就可以及时作出预报了。这是所谓“数值计算”的应用。然而电子计算机还可以进行所谓“非数值应用”,即那种不是数值计算性质的计算。比如说,设计了一座楼,我们希望预先看到它造成之后,从平地上各个不同角度、不同距离看到的立体形象,最好还能使这个立体形象对我们旋转起来,看看是什么样子。比如说在飞机上看起来是什么样子,而且要自远而近,自近而远,以至围着它转,看起来

是什么样子。计算机可以使这种设计好的形象在荧光屏上显示出来,如像电视一样。再如化合物的分子结构也可以通过电子计算机,在荧光屏上显示出能够旋转的立体图像。因此电子计算机的问世不仅使一些长期因为计算量浩大而不可设想的问题现在有了解决的可能,而且计算机还为数学研究提供了有力的工具。使数学有可能像其他自然科学一样,跻身于科学实验的行列。目前,计算机对数学研究至少有以下一些应用。第一,用计算机进行探索、发现规律。比如19世纪高斯为了发现整数性质的规律性,曾对各种特殊情况做了大量艰苦的计算工作以为试探,高斯关于整数论的一些著名定理,就是用这种"系统尝试法"发现的。现在这种手工业的系统尝试完全可以用电子计算机来代替了。应用数学中微分方程孤立子解的获得,就是首先在计算机的荧光屏上发现的。第二,用计算机进行数学定理的证明,例如:过去一百多年来未解决的"四色问题"的证明,于1976年在电子计算机上得到了实现。电子计算机解决这个难题,进行了一百亿个判断,用了1200小时。设想,电子计算机比人快二百万倍的话,如果由人来完成一百亿个判断,得花大约二三十万年的时间。现代数学的理论研究告诉我们,有着许多问题不用电子计算机根本不能解决,这样的问题还非常之多。"四色问题"被机器证明,这预示着数学研究工作方式将发生巨大变革。一种推理过程,只要这个过程是具有机械性的,就可以由电子计算机来实现。比如,几何定理的证明就是可以机械化的,可以由电子计算机来实现。吴文俊在《判定问题和初等几何定理证明的机械化》论文中找到了很好的机械化证明的方法。这也是电子计算机的一种"非数值应用"。

再有,计算机发展不但刺激了数值计算方法的进展,唤起了对数值分析的重视,而且还由于电子计算机的发展带来可能实现的技术条件,促使人们去探求数学过程如何定型规格化而在计算机上具体实现机械化,比如研究如何实现用机器证明数学定理的设想,这将使数学研究作为脑力劳动在方式上带来革新。我们应该注

意到，对于数学未来发展具有决定性影响的一个不可估量的方面是计算机对数学带来的冲击。“现在的计算机通过小型化而成为每个数学家的有力工具，这一设想势将成为现实，数学家们对这些前景必须有着足够的思想准备”。

如今电子计算机的应用，是一个国家是否实现科技现代化的重要标志之一。

20 世纪下半叶，电子计算机运算速度提高了 10 万倍，基础器件由真空管——晶体管——集成电路——超大规模集成电路，至少已作了四次重大革新，20 世纪 70 年代以来，计算机的数量每年至少以 20%的速率上升，功能不断增强，效率逐步提高，应用日益广泛。

计算机在科研工作中广泛应用着。现代科技发展，离开计算机是不行的，如大范围天气预报，判读卫星所摄照片，空气动力学，原子核物理等方面大量工作靠人工很难解决，尖端科学、原子反应堆、回旋加速器，卫星和载人飞船都是在超高温、超高速、超高压下运行的，用实验方法进行模拟研究其客观规律比较困难，因此采用计算机进行理论计算就成为解决问题的重要方法了。

随之而来的还有个人工智能的问题，即计算机将代替人的某些思维活动，认识人的思维规律。在部分劳动上机器将代替人、超过人（如高温、潜深水作业）并已逐步变成现实。这种新的情况必将为唯物主义哲学提供新的自然科学基础。作为唯物主义哲学家要欢迎自然科学中的突破传统观念的革新，以使唯物主义自然观不断发展而改变自己的形式。千万不应墨守陈规，要敢于设想，勇于在实践中探索。

以上几个方面只是概述了现代数学的一些主要特点和发展趋势。其他如现代数学的发展中文献及期刊著作数量的繁多，使数学界出现了学术交流的日益增强。由于资料成堆，使人感到生命的短促，因此个人研究逐渐萌发走向集体化的因素，学术交流的报告增多了，在现代社会中，每个数学家无论其自觉与否总是作为“数学

共同体"的一员从事自己的研究活动的，从而不应被看成是一种完全孤立的活动。

思考题

1. 简述19世纪以来几个主要数学分支发生的重大变革及这些变革对数学发展带来的影响。

2. 概述现代数学进展中的主要特点和趋势。

第八章

马克思数学手稿简介

伟大革命导师马克思，从无产阶级革命斗争的需要出发，十分注意研究自然科学。从 19 世纪 50 年代起，他配合政治经济学、哲学的研究，开始钻研数学。以后，他坚持“独立的数学研究”，数学始终是马克思经常关心和从事研究的一个专门领域。由于工作上长期过度劳累，加上经济上的困难，严重地损害了马克思的身体健康，他患有多种疾病，就是在病魔缠身不能工作时，马克思仍以惊人的毅力，坚持着数学研究。1860 年 11 月 23 日，马克思致恩格斯的信中说过：“写文章现在对我来说几乎是不可能了。我能用来使心灵保持必要平静的惟一的事情，就是数学”。马克思 1865 年 5 月 20 日给恩格斯的信中还说过：“在工作之余——当然不能老是写作——我就搞搞微分学$\frac{dx}{dy}$，我没有耐心再去读别的东西”。在几十年间，马克思写下了许多数学的读书笔记和研究札记，其中对于微积分，特别是对微分学的发展过程、微分运算的辩证本质作了精湛

的研究,写成了关于导函数、关于微分等问题的论文。正如恩格斯所说"马克思是精通数学的",并且在这个领域"有独到的发现"。马克思的长达一千多页内容十分丰富的数学手稿,是珍贵的马克思主义的文献,是通过数学研究阐发唯物辩证法观点的一个光辉范例。

数学手稿涉及初等数学、高等数学,内容极为广泛。其中尤其以微分学部分更为系统、深刻,我们只把这个部分作一概要的简介。

一、关于微分学历史的发展过程

微积分是在17世纪诞生的新的数学方法。当时由于资产阶级革命解放了生产力,使自然科学从中世纪神学的束缚中解放出来,一下子重新兴起,并且以神奇的速度发展起来。由于天文、航海、战争等各方面的需要,提出了不少新的数学课题。这些课题的中心之点,在于要求用数学工具来刻画运动,要用数学方法来研究机械运动的规律。比如:"从17世纪中叶以来,几乎所有大数学家,只要他们研究应用力学,并把它从理论上加以阐明,就都是从磨谷物的简单的水磨着手的"。[1]

这些课题主要有:

1. 已知物体运动的路程与时间的函数关系,求速度与加速度,反过来,已知物体运动的速度和加速度与时间的函数关系,求路程;

2. 求曲线的切线;

3. 求函数的极大、极小值问题;

4. 求曲线的弧长、求曲线所围成的面积、曲面所围成的体积等求积问题。

当时对这几类数学问题,第一,原有的数学工具只能就个别、

〔1〕《马克思恩格斯全集》第30卷,人民出版社,1963年版,第319页。

特殊情况以及个别特殊的方法来解决，总的说来，过去研究常量数学的工具是无能为力的，因此客观上需要总结研究运动变化的新的数学工具。第二，由于生产发展的需要，人们事实上就特殊的运动规律从实践上已经解决了。比如由于制造凸透镜的需要，人们事实上对抛物线一点的切线斜率的值已经由实验的办法知道得很清楚了。同时天文学中对行星观测的数据也需要加以理论的整理和概括，这一切都为新的数学方法产生提供了必要的实验材料。

这时摆在数学家面前的任务就是在科学实验的实践基础上总结一般的研究变量运动的新的数学方法。历史上如伽利略、开普勒、托里拆利、费尔马、惠更斯以及牛顿的老师巴罗等人都做了大量的工作，积累了丰富的材料与经验。17 世纪上半叶，笛卡儿发表了《方法论》一书，在书中引入了变数的概念，为数学上研究变量、研究运动提供了新的方法。17 世纪下半叶，牛顿、莱布尼茨分别独立地、系统地总结和发展了前人工作的成果，牛顿于 1665—1666 年(发表于 1704 年)，莱布尼茨于 1673—1676 年(发表于 1684 年)几乎同时地制定了微积分。这种情况正如恩格斯所评价的："数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分学和积分学也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由它们发明的。"

由牛顿、莱布尼茨制定微积分到 19 世纪经过了 200 多年，这一新的数学方法才日臻完善。马克思详细研究了一些微分学发展中的主要代表著作，把微分学在 18 世纪以前的发展划分为三个历史时期：

1. 牛—莱的微分方法—神秘的微分学

我们以 $y=x^2$ 为例

$$y+\mathrm{d}y=(x+\mathrm{d}x)^2$$

$$=x^2+2x\mathrm{d}x+\mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x+\mathrm{d}x^2$$

镇压 dx^2，

$$dy = 2x dx$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

这个方法，结果是正确的，马克思说："这是人们纯粹实验地发现的。""人们早就知道了它们实际的导数"。[1]

但在数学推理上则是不严密的，是错误的。

(1)dx，dy 是先验的，怎么来的不清楚，"$x_1 = x + \Delta x$ 从一开始就变成 $x_1 = x + dx$，或 $x + \dot{x}$，这里 dx 是通过形而上学的解释假定的。它首先存在，然后加以解释。"

(2)为什么要用暴力镇压掉挡路的一些项，如 dx^2，是没有道理的，dx 是 0 还是非 0 讲不清楚。

这种由不正确的数学推理带来了正确的结果，使微分是什么，以及它的推理方法都带有神秘的色彩，故谓之曰：神秘的微分学。

正像对任何新生事物一样，(1)这种方法很有生命力，因为它得出的结果总是正确的，弄得传统数学家最后不得不嘟嘟哝哝的让步了。(2)还很不完善，从数学推理上讲还很不严格，甚至包含着谬误。

对微积分这一新生事物，在社会上引起了各种各样的反响。首先，来自一些具有正统思想的数学家，固守数学中旧观念、旧传统的人对微积分进行的刁难与指责。如当时法国数学家罗尔就宣称："如果新的体系有什么真理性的话，我是看不出来的，我觉得它常常掩盖着错误。"他认为：新体系破坏了数学的"严密性的特征"，"带进了某些不正确的或者不可靠的命题"，"应该立刻把它从这门科学中驱逐出去。"

另外，一些反动的哲学家，则抓住新生事物的不完善之处大作文章，为唯心主义哲学辩护。英国大主教贝克莱就是一个突出的代

[1] 马克思：《数学手稿》人民出版社，1975 年版，第 86 页。

表，他胡诌什么无穷小量是“逝去量的鬼魂”，微积分的推导是“分明的诡辩”。声称在微积分那里“并不比宗教中所包含的神秘更少的终极信仰”。他的一个朋友，因病快要死去了，由于这个病者认为基督教的原理并没有像科学那样铁一般的证实能力，因此拒绝了牧师的祈祷。贝克莱知道了勃然大怒，并以微分学为例子，叫嚷“科学的女王—数学，不也同样是建立在不安定的基础之上吗？但尽管这样，它并没有失掉实际的意义和结果的正确性呀！”

微积分历史上这场争论从 1734—1745 年达十多年之久，也没最后平息。马克思总结了这一历史情况，深刻地指出：“于是，人们自己相信了新发现的算法的神秘性，这种算法通过肯定是不正确的数学途径得出了正确的(尤其在几何应用上是惊人的)结果。人们就这样把自己神秘化了，对这新发现评价更高了，使一群旧式正统派数学家更加恼怒，并且激起了敌对的叫嚣，这种叫嚣甚至在数学界以外产生了反响，而为新事物开拓道路，这是必然的。”[1]

在这种情况下，迫使数学家要修正微分计算法，在数学上使它逐渐严格起来，正如达兰贝尔所说：“向前进，你就会产生信念！”也正是达兰贝尔在撕去微分学神秘的外衣方面向前进了一大步。

2. 达兰贝尔方法—理性的微分学

$$y=x^2 \quad y=f(x)=x^2$$

$$y_1=f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$$

$$y_1-y=f(x+h)-f(x)$$

$$=2xh+h^2$$

$$\frac{y_1-y}{h}=2x+h$$

令

$$h=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=2x$$

[1] 马克思：《数学手稿》人民出版社，1975 年版，第 88 页。

达兰贝尔方法在数学意义上是严格的。

存在问题：

从出发点看，$x+h$，x 这个变量并没有真正运动变化，h 就其大小而言是不确定的，但 h 作为与 x 有区别的与之相分离的量又是确定的，$x+h$"如同胎儿与怀孕前的母亲并列着"一样歪曲了变数原来的形象。

从演化来看，$2x$ 是由二项式定理展开直接产生的、现成的，不是发展来的，整个推导过程看不到变量 x 变化发展，只是把 $2x$ 从其他碍手碍脚的项中解脱出来。

因此，马克思称达兰贝尔的方法为理性的微分学，正如马克思所讲：达兰贝尔脱下了微分学的神秘外衣，取得了很大的进步。[1]

3. 拉格朗日方法——纯代数的微分学

为了把微分学代数化，拉格朗日就用泰勒定理作为出发点：

$$f(x+h)=f(x)+\frac{dy}{dx}\cdot h+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\cdot\frac{h^2}{2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2\cdot 3}+\frac{d^4y}{dx^4}\cdot\frac{h^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

它直接定义$\frac{dy}{dx}$等为泰勒展开的对应项的系数。

这种定义只有在微分学发展到较高阶段才有可能，它的主要特点是把微分学代数化了，只是把神秘微分方法 $y+dy$ 中的秘密清楚地显露出来了。它们实际上还是以二项式定理为基础的。马克思评价："拉格朗日的巨大功绩不仅在于用纯代数的分析方法给泰勒定理以及一般地给微分学奠定了基础，而且尤其在于引进了导函数的概念"。[2]"拉格朗日给出了泰勒定理的代数证明，这证明就构成了他的微分学的代数方法的基础"。[3]

以上是马克思考察微分学历史发展过程的一些分析，这个过

[1] 马克思：《数学手稿》人民出版社，1975 年版，第 91 页。
[2] 马克思：《数学手稿》人民出版社，1975 年版，第 146 页。
[3] 马克思：《数学手稿》人民出版社，1975 年版，第 150 页。

程大约经历了近一百年的情况，综合如表(8-1)所示。

表(8-1)

	神秘的微分学	理性的微分学	纯代数的微分学
代表人物	牛顿 (1642—1727年) 莱布尼茨 (1646—1716年)	达兰贝尔 (1717—1783年)	拉格朗日 (1736—1813年)
代表著作	《自然哲学的数学原理》 (1687年版)	《流体论》 (1744年版)	《解析函数论》 (1797年、1813年版)

二、关于导函数和微分

马克思数学手稿中，基本最后定稿的有论导函数概念，以及论微分两篇。前一篇马克思于1881年誊清并寄给恩格斯，恩格斯仔细读了这份手稿，并于1881年8月18日给马克思写了回信。后一篇大概是马克思于1881年写给恩格斯的。恩格斯在1882年11月21日给马克思的信中谈到了这份手稿。

我们的介绍也主要以这两份手稿为依据

1. 以 $y=x^2$ 为例对导函数的分析

首先让 x 变化到 x_1，这时 y 变化到 $y_1=x_1^2$

函数变化，$y_1-y=x_1^2-x^2$

$$=(x_1-x)(x_1+x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=x_1+x \quad \text{[预备导函数]}$$

令 x_1 变回到 x，

$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{0}{0}\right)=2x$　dy，dx 作为消失了的差，或扬弃了的差，以符号形式出现。

说明：

(1)为了得到导数$\frac{dy}{dx}$,必须使$\frac{\Delta y}{\Delta x}$变化并达到$\frac{0}{0}$,绝不允许无限趋近之类的糊涂话。我们理解,这句话是指不要用各种奇想来回避$\left(\frac{0}{0}\right)$,而要敢于正视$\left(\frac{0}{0}\right)$。分母是Δx消失为0的结果,分子是Δy随之消失于0的结果,这是一方面。另一方面,为了表明$\left(\frac{0}{0}\right)$的来源与含义,就必须创造新的形式来表达新的内容,这样,我们就需要"用符号$\frac{dy}{dx}$来表示$\frac{\Delta y}{\Delta x}$变为$\frac{0}{0}$","把$\frac{0}{0}$中的质的关系用$\frac{dy}{dx}$固定下来"[1]

(2)马克思对微分法的论述,是从变量自身变化出发,最后发展出了导函数,它即不是先验的假设,也不是解脱出来的,而是发展出来的。

马克思研究导函数的辩证发展,与它研究商品的发展有着相似之处:

商品交换最初以物易物
2只羊=1袋米
羊的价值很难由自身看出来,但一经交换,可以从米的数量上表现出来。
而货币交换是由以物易物发展出来的。

一元= 1袋米 / 2只羊 / 4斤盐 / ……

预备导函数,是在个别情况下的平均速度(每一个特定变化中,这种关系是怎么发生的)

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=x_1+x$$

导函数是从预备导函数发展出来的,这是普遍的纯粹的关系。

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

↓ 符号等价物　　↓ 实在等价物

[1] 马克思:《数学手稿》人民出版社,1975年版,第15~17页。

这是商品交换运动发展的结果，

这是一般的等价物

货币一经产生，它与其他商品不同了。同样微分产生以后，主动性也必然从实在等价物一端转移到符号等价物的一端，可以独立运动了。因此微分学就成了某种特殊的计算法，它已在自己的土地上独立地行动了！

2. 几个例题

例 1：$y=x^m(m\in N)$

$$y_1=x_1^m$$

$$y_1-y=x_1^m-x^m=(x_1-x)\underbrace{(x_1^{m-1}+x_1^{m-2}x+\cdots+x^{m-1})}_{m\text{项}}$$

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\underbrace{x_1^{m-1}+\cdots+x^{m-1}}_{m\text{项}}$$

令 $x_1=x$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=mx$$

例 2： $y=\sqrt{a^2+x^2}$

$$y_1=\sqrt{a^2+x_1^2}$$

$$y_1-y=\sqrt{a^2+x_1^2}-\sqrt{a^2+x^2}$$

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\sqrt{a^2+x_1^2}-\sqrt{a^2+x^2}}{x_1-x}$$

$$=\frac{a^2+x_1^2-(a^2+x^2)}{(x_1-x)(\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2})}$$

$$=\frac{x_1+x}{\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2}}$$

令 $x_1=x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

3. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$由符号等价物到运算符号作用的自行转变

分析：$y=uz \quad y(x)=u(x)z(x)$

当 $\qquad x\to x_1 \quad y_1=u_1z_1$

$$y_1-y=u_1z_1-uz=u_1z_1-z_1u+z_1u-uz$$
$$=z_1(u_1-u)+u(z_1-z)$$

预备导函数

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=z_1\cdot\frac{u_1-u}{x_1-x}+u\cdot\frac{z_1-z}{x_1-x}$$
$$=z_1\frac{\Delta u_1}{\Delta x}+u\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

令 $x_1-x=0, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=z\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ （＊）

即，对 $y=uz$，求得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

将上述演算与 y 只有一个依赖于 x 的因变量的函数的演算 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$比较，看形式上有什么区别。

(1)(＊)右边本身包含符号微分系数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。

(2)由于两边都有符号微分系数，所以哪一边都没有实在值，检查我们的推导无误，那么原因怎么造成的呢？

(3)分析产生差别的原因

因为 $y=uz$ 中，两边都被“因变量”占据着，y 直接依赖于 u 和 z，而 u 和 z 本身又依赖于 x，原函数 uz 的这一特点必然要给它的导数打上烙印，u 和 z 只是一些依赖于 x 的函数的名称和符号。这一个特点必然要带到导函数中去。

于是$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$、$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$就有了差别。

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$还是符号等价物，它的实在等价物在等式右边。

而$\frac{du}{dx}$、$\frac{dz}{dx}$并不处于它们的实在等价物的对面，它们是单方面出世的，于是对$\frac{dy}{dx}$、$\frac{dz}{dx}$来说：

影子离开了投下影子的物体，符号微分系数离开了实在微分系数，此时$\frac{du}{dx}$、$\frac{dz}{dx}$的作用发生了变化，它成了独立的出发点，而实在等价物还需要去寻找，$\frac{du}{dx}$、$\frac{dz}{dx}$也就立刻转变为运算符号，$\frac{du}{dx}$表示给出函数u去寻求它的导数的意思了。从而微分学就成了一种特殊的计算法，$\frac{du}{dx}$、$\frac{dz}{dx}$仅仅是属于微分学并且标志微分学特性的数学量。

4. $dy=f'(x)dx$ 作为$\frac{dy}{dx}=f'(x)$的另一种形式，它永远可以变为后者。

(1)$\frac{dy}{dx}=f'(x)$写成 $dy=f'(x)dx$ 的理由

$\frac{dy}{dx}$一旦把$\left(\frac{0}{0}\right)$所不能表达的质的关系确定下来，它们分开就完全可以了，位置上的改变不会损害它们的关系。

(2)这样，用代数方法产生的符号 d 变成了运算符号，$dy=f'(x)dx$ 看作符号运算等式，$dy=df(x)$标志着 $f(x)$施行由 $df(x)$所标志的微分运算，那么结果是 $dy=f'(x)dx$。

(3)$\frac{dy}{dx}$与$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的关系：$\frac{dy}{dx}$意味着穿上制服的$\frac{\Delta y}{\Delta x}$。出发点是 x，$y\rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}$，最后变为$\frac{dy}{dx}$。

(4)证明复合函数微分公式

$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$

$y_1=f(u_1)$，$u_1=\varphi(x_1)$

$$\frac{y_1-y}{u_1-u}=\frac{f(u_1)-f(u)}{u_1-u}\xrightarrow{\text{穿上制服}}\frac{dy}{du}=\frac{df(u)}{du}=\frac{f'(u)du}{du}=f'(u)$$

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x)}{x_1-x}\xrightarrow{\text{穿上制服}}\frac{du}{dx}=\frac{d\varphi(u)}{dx}=\frac{\varphi'(x)dx}{dx}=\varphi'(x)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

马克思对导数微分的分析是从唯物辩证法出发，从量的变化与质的关系，形式以及内容的关系，考察由代数方法内在地向微分方法的过渡。对数学家百般回避的$\left(\frac{0}{0}\right)$给予了辩证的解释，论证了微分过程是一个否定之否定的过程；微分是“扬弃了的差”这一重要的思想。这无疑是马克思对数学的精辟见解及独到的发现。这对学习和研究唯物辩证法是有积极意义的。至于具体数学的求导方法等内容现在看来已经被历史所淘汰，是已成为历史的东西了。人们没有必要也不应该把现在的已经发展了的分析理论拉回到17、18世纪的水平上去。

5. 微分真正表明过程——运动

什么是运动？“一个事物是它自身，同时又在不断变化，它本身有‘不变’和‘变’的对立，这就是矛盾”，运动就是变与不变的对立统一。

微积分研究机械位移，“运动本身就是矛盾；甚至简单的机械的位移之所以能够实现，也只是因为物体在同一瞬间既在一个地方又在另一个地方，既在同一个地方又不在同一个地方。这种矛盾的连续产生和同时解决正好就是运动”。[1]

函数 $y=f(x)$能不能表达运动呢？它只能表达运动的结果，而不能表达运动自身，它的特点是一一对应。它只表明物体某一瞬间在一个地方，在接着而来的另一瞬间又在另一个地方，正如列宁所说：

(1)它描述的是运动的结果，而不是运动自身；

(2)它没有指出运动的可能性，它自身没有包含运动的可能性；

(3)它把运动描写成为一些静止状态的总和、联结，就是说，那

---

〔1〕 恩格斯：《反杜林论》人民出版社，1970 年版，第 117 页。

种(辩证的)矛盾没有被消除,而只是被掩盖、推开、隐藏、搁置起来了。[1] 所以恩格斯讲"当我们说,在 $y=f(x)$ 这个公式中,x 和 y 是变量,但是如果我们只停留在这一步,那末这只是一个没有任何进一步结果的论断,而 x,y 暂时事实上仍然是常数,只有当它们真正地,也就是在函数内部变化时,它们才真正成为变量,而且只有那时,才能显示出隐藏于最初的方程式中的不只是两个量本身的关系,而是它们的可变性的关系"。[2]

那么如何用思维来把握运动呢?"如果不把不间断的东西割断,不使活生生的东西简单化、粗糙化,不加以割碎,不使之僵化,那么我们就不能想象、表达、测量、描述运动。"[3]

为了描述运动,我们要把对立双方"变"与"不变"分割开考察。

$y=x^2$ 表达了在 x 时刻物体 y 在这里,是不变的一方面,让 $x\to x_1$,则是考察变的一面、不在这里的一面,因之就形成了 x_1 时刻物体在 y_1,$y_1=x_1^2$。

这样就可以简单化、粗糙化的反映运动,$\frac{y_1-y}{x_1-x}=x_1+x$。

但这还不是运动的本质,运动的本质在什么地方呢?列宁说:"对立面的统一,同一这个公式正是表现着这个本质。"我们使上述"变"与"不变"这两个对立面实现统一,处于同一瞬间这个统一体中,即让 x_1 运动回到 x,$\left(\frac{0}{0}\right)=2x$。

这时,瞬时是由 $[x_1,x]$ 缩小而来,消失为 0 所致。$2x$ 中包含 x,即在这里的因素,也包含着 x_1 变为的 x,即不在这里的"可变"因素,因此 $\left(\frac{0}{0}\right)=2x$,即 $\frac{dy}{dx}=2x$ 表明了"在这里又不在这里的统一。"所以正如恩格斯所说:"只有微分学才能使自然科学有可能用数学不仅仅表明状态,并且也表明过程,运动。"[4]

---

[1] 列宁:《哲学笔记》人民出版社,1974 年版,第 285 页。
[2] 《马克思恩格斯全集》人民出版社,1963 年版,第 35 卷,第 21~23 页。
[3] 列宁:《哲学笔记》人民出版社,1974 年版,第 285 页。
[4] 恩格斯:《自然辩证法》人民出版社,1971 年版,第 249 页。

$$x \longrightarrow x_1 \longrightarrow x$$

$$f(x) \longrightarrow \text{预备导函数} \longrightarrow f'(x)$$

$$f_1(x)$$

x 运动到 x_1，否定了不变的初始状态，肯定了位移，从而产生了预备导函数——这种每一特定变化中，只适应于个别场合的关系。

$x_1 \to x$，否定了位移，肯定了变与不变的统一，即运动，从而产生了导函数，这种普遍的纯粹的关系。

这样，不是简单回复到出发点，而是发展出了新的东西，是一个否定之否定的过程。

三、如何认识数学手稿

1. 马克思的《数学手稿》是马克思主义的重要文献，马克思应用辩证唯物主义的立场、观点和方法研究了微分学的历史和理论，着重阐述了微分过程是一个否定之否定的过程；微分是"扬弃了的差"等一系列重要思想。这无疑为辩证唯物主义哲学提供了自然科学依据。同时对研究微积分思想的发展史也是有重大意义的。马克思很重视这些手稿，生前曾嘱咐他女儿爱琳娜，要她和恩格斯处理他的全部文稿，"并关心出版那些应该出版的东西，特别是第二卷和一些数学著作。"恩格斯也曾明确表示希望有机会将自己在自然辩证法方面的研究成果汇集起来，"同马克思所遗留下来的极其重要的数学手稿一齐发表。"通过革命导师本人的态度，也可看到对数学手稿发表的意义是不容忽视的。

2. 学习数学手稿要学习马克思严谨的科学态度和刻苦的钻研精神。马克思为了研究数学，对很多主要数学著作都进行了摘录、提要。对一些有代表性的著作版本以及数学史都进行了考察。还有一些内容是关于一些数学问题的专题考察的资料，为了探究一个问题，马克思总是收集和整理他所能找到的一切材料，比如为了考察微分学的哲学基础问题，在有关代数学手稿中，马克思特别

注意积累下列问题的材料：

(1)从初等代数学到微分学的转变是怎样产生的；

(2)牛顿二项式定理在这里起了怎样的作用；

(3)从有限次多项式到无穷级数转变是怎样一般地发生的；

(4)形如$\frac{0}{0}$的表达式在代数学中与微分学中有什么区别；

(5)代数学中是以怎样的形式，并且是在解决怎样的问题时才碰到导数的原型。

这反映了马克思“研究必须充分地占有材料，分析它的各种发展形式，探寻这些形式的内在联系。只有这项工作完成之后，现实的运动才能适当地叙述出来”的研究方法。

马克思不顾病痛坚持研究数学的精神也是值得我们学习的。

3．必须用历史唯物主义的观点来看待手稿。恩格斯说：“马克思精通数学，并有独到的发现”。但只要你仔细阅读手稿，就会发现，作为19世纪的马克思，研究的数学只是十七八世纪的资料，对19世纪本身的进展未有涉及，这怎么能说是精通呢？他所使用的方法，都是历史上已有的方法，怎么能说是独到的发现呢？我们认为，精通是指能用辩证唯物主义观点研究他所涉及到的数学部分，并比专业数学家有了更深刻的认识。有的认识确有独到之处。但马克思究竟不是专业数学家。“马克思虽然精通代数，但他对数学计算，特别是对商业数字的计算，还不太熟练，出现了一些不正确的和互相矛盾的地方”[1]。并且马克思研究的数学是18世纪以前的，因此关于拉格朗日“给微分学奠定基础”的论断是错误的，马克思对柯西以及外尔斯特拉斯的极限理论的当代书籍根本没有考察，有时他还有“误差补偿”观点来解释为什么牛顿的流数法能得到正确的结果。这些都是由历史局限性和马克思在数学领域中知识局限性所造成的。因此我们要学习数学手稿中的立场、观点、方法以及独到之处的精华，即精神实质，不应该也不允许把数学手稿

[1] 马克思：《资本论》(第二卷)，人民出版社，1975年版，第315页。

说成是“马克思为微积分奠定理论基础”。甚至要求用数学手稿来改造微积分。历史在前进，新的东西层出不穷，马克思所用的兰登的微分法早已被淘汰。微积分的理论基础早已被柯西、外尔斯特拉斯等人所建立。而今又发展出了非标准分析。这一些重大发展，改变了人们许多看法，而把陈旧的观点放到人类的认识史里去了。同样的，马克思《数学手稿》中的材料及许多具体观点已成为历史了。永存的是从数学研究中为辩证唯物主义吸取的养料，永放光芒的是用唯物辩证法为指导来分析研究数学发展过程，弄清数学之间相互联系与转化的观点和方法！

附录 1

独立作业（论文习作）选题

（一）

参考选题

《数学方法论》论文选题，我们仅列举十个方面供大家参考。请你择其中一个方面，在这一方面内选一个小问题为你的论文题目即可。

一、试论数学公理方法

1. 试论公理的本质（在于经验资料的理想化）。
2. 试论公理的辩证证明。
3. 试论中学数学中的公理方法。

二、试论数学模型方法

1. 试论行程问题的数学模型。
2. 试论溶液配比问题的数学模型。
3. 试论中学数学教学中建模能力的培养。

三、试论中学数学中的化归原则

1. 方程问题中的化归方法。
2. 平面几何证明中的化归方法。
3. 几种类型的化归途径。

四、试论关系映射反演（*RMI*）方法

1. 试从解析几何的思想看 *RMI* 方法。
2. 试从对数计算看 *RMI* 方法。
3. 中学数学中 *RMI* 方法的应用例析。

五、试论中学数学教学中的合情推理

1. 中学数学教学中的不完全归纳。

2. 中学数学教学中的联想与类比。

3. 中学数学教学中的助探法。

六、试论数学猜想及其方法论意义

1. 谈谈“先猜后证”。

2. 数学解题策略中的“进”与“退”。

3. 例说“观察—猜想—证明”思维方法链的具体应用。

七、试析反例及其方法论意义

1. 反例与数学概念教学。

2. 反例与数学定理教学。

3. 设计反例的方法初探。

八、试析中学数学解题中的思维活动

1. 中学数学解题中的直觉思维

2. 中学数学解题中的分类讨论

3. 中学数学解题中的构造性思维

九、举例分析中学生的数学创造性思维

1. 例说数学思维中的“顿悟现象”。

2. 例说数学思维中的“再造想象”。

3. 试论中学生的数学学习是个“再创造的过程”。

十、试析中学数学中的辩证唯物主义教育因素

1. 谈学习的刻苦精神与“数学的愉快学习”。

2. 例谈普遍联系的观点在中学数学教学中的运用。

3. 古今中外的数学家谈数学学习。

(二)

写论文的操作程序

(1) 选题，不要太大。

(2) 收集资料：

①有关这方面的参考书和文章。

②对观点、例题进行评析、筛选、改造。

③自己实际教学中积累的想法、成果、经验和资料。

(3) 列出写作的大纲和细目。

(4) 在上述分析的基础上进行综合，写成论文。

(5) 论文要求在4千字左右为宜。

附录 2

主要参考书目

1.《华罗庚科普著作选集》上海教育出版社 1984 年版。

2. 徐利治著:《数学方法论选讲》华中工学院出版社 1988 年 2 月第 2 版。

3.《吴文俊文集》山东教育出版社 1986 年版。

4. 邓东皋、孙小礼、张祖贵《数学与文化》北京大学出版社 1990 年版。

5. 孙小礼 楼格主编《人·自然·社会》北京大学出版社 1988 年版。

6. 关肇直:《从近代数学史看生产实际对数学发展的作用》见《数学通报》1959 年 8 月号。

7. 秦元勋:《几何学通论》,商务印书馆 1959 年版。

8. 钱宝琮主编:《中国数学史》科学出版社 1992 年第三次印刷。

9. 李俨、杜石然:《中国古代数学简史》(上、下),中华书局 1963 年版。

10. 李心灿:《微积分的创立者及其先驱》航空工业出版社 1994 年版。

11. 李心灿:《当代数学大师》航空工业出版社 1994 年版。

12. 张奠宙 赵斌:《20 世纪数学史论》知识出版社 1984 年版。

13.《数学—它的内容、方法和意义》(第一、二、三卷)科学出版社 1959 年版。

14. M·克莱因《古今数学思想》(第一、二、三、四册)上海科学技术出版社 1979 年版。

15. G·波利亚著《数学的发现》(第一卷、第二卷)内蒙古人民出版社 1980 年版。

16. G·波利亚著《数学与猜想》科学出版社 1984 年版。

17. D·J·斯特洛伊克《数学简史》科学出版社 1956 年版。

18. 卡·B·波耶:《微积分概念史》上海人民出版社 1977 年版。

19. 郭书春著《古代世界数学泰斗刘徽》山东科学技术出版社 1992 年版。

20.《自然辩证法论文集》人民出版社 1983 年版。